

Aufgabe 4: Welche Aussagen sind richtig?

- a) Jede diagonalisierbare $n \times n$ Matrix hat n linear unabhängige Eigenvektoren. ja nein
- b) Jede diagonalisierbare $n \times n$ Matrix hat n verschiedene Eigenwerte. ja nein
- c) Jede symmetrische $n \times n$ Matrix hat n verschiedene Eigenwerte. ja nein
- d) Jede symmetrische Matrix ist diagonalisierbar. ja nein
- e) Jede Spiegelungsmatrix ist diagonalisierbar. ja nein

LÖSUNG:

- a) **Ja!** Siehe Skript bzw. Vorlesung.
- b) **Nein!** Gegenbeispiel: $n \times n$ Einheitsmatrix

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Der Eigenwert $\lambda = 1$ ist n -facher Eigenwert:

$$\det(\mathbf{I} - \lambda \mathbf{I}) = \det((1 - \lambda)\mathbf{I}) = (1 - \lambda)^n \det \mathbf{I} = (1 - \lambda)^n .$$

- c) **Nein!** Siehe b)! Die $n \times n$ Einheitsmatrix \mathbf{I} ist symmetrisch!
- d) **Ja!** Siehe Skript bzw. Vorlesung.
- e) **Ja!** Eine Spiegelungsmatrix ist symmetrisch. Siehe auch Skript bzw. Vorlesung.

Aufgabe 5: Gegeben seien zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$. Zeigen Sie:

- a) Sind beide Matrizen A und B orthogonal, so ist auch die Matrix AB orthogonal.
- b) Ist die Matrix A orthogonal, dann gilt $|\det A| = 1$.

LÖSUNG:

a) Wir wollen zeigen, dass die Matrix AB orthogonal ist, d.h. $(AB)^T = (AB)^{-1}$.

$$\begin{aligned} (AB)^T AB &= B^T A^T AB \\ &\stackrel{A \text{ orthogonal}}{=} B^T \mathbb{1} B \\ &= B^T B \\ &\stackrel{B \text{ orthogonal}}{=} \mathbb{1} \\ \Rightarrow (AB)^T &= (AB)^{-1} \end{aligned}$$

b) Da die Matrix A orthogonal ist folgt, dass sie auch diagonalisierbar ist.

$$\Rightarrow A = Q^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} Q$$

Die Determinante von A lässt sich also schreiben als

$$\begin{aligned} \det A &= \det Q^{-1} \det \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \det Q \\ &= (\det Q)^{-1} \lambda_1 \cdots \lambda_n \det Q \\ &= \lambda_1 \cdots \lambda_n \end{aligned}$$

Aus der Vorlesung wissen wir, dass für die Eigenwerte λ_i einer orthogonalen Matrix gilt $|\lambda_i| = 1$.

$$\Rightarrow |\det A| = 1$$

Aufgabe 6: Betrachten Sie die Spiegelungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A .

LÖSUNG: Um die Eigenwerte der Spiegelungsmatrix A zu berechnen, berechnen wir zuerst das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det(A - \lambda \mathbb{1}) \\ &= \det \begin{pmatrix} \cos \alpha - \lambda & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha - \lambda \end{pmatrix} \\ &= (\cos \alpha - \lambda)(-\cos \alpha - \lambda) - \sin^2 \alpha \\ &= -\cos^2 \alpha + \lambda \cos \alpha - \lambda \cos \alpha + \lambda^2 - \sin^2 \alpha \\ &= \lambda^2 - (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \\ &= \lambda^2 - 1 \end{aligned}$$

und bestimmen dessen Nullstellen

$$P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1$$

Die Eigenwerte der Spiegelungsmatrix A lauten also $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 1$.
 Nun berechnen wir die zugehörigen Eigenvektoren

$$\begin{aligned} Ax &= \lambda_{1,2}x \\ \Leftrightarrow (A - \lambda_{1,2}\mathbb{1})x &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos \alpha \pm 1 & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \pm 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (\cos \alpha \pm 1)x_1 + x_2 \sin \alpha &= 0 \\ x_1 &= \frac{\cos \alpha \mp 1}{\sin \alpha} x_2 \end{cases} \end{aligned}$$

Setzt man x_1 ein, so erhält man

$$\begin{aligned} (\cos \alpha \pm 1)x_1 + x_2 \sin \alpha &= 0 \\ \Leftrightarrow (\cos \alpha \pm 1) \frac{\cos \alpha \mp 1}{\sin \alpha} x_2 + x_2 \sin \alpha &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\cos^2 \alpha - 1}{\sin \alpha} x_2 + x_2 \sin \alpha &= 0 \\ \Leftrightarrow -x_2 \sin \alpha + x_2 \sin \alpha &= 0 \\ \Leftrightarrow 0 &= 0 \end{aligned}$$

Der Eigenraum zum Eigenwert $\lambda_1 = -1$ ist also gegeben durch

$$\begin{aligned} \left\{ \beta \begin{pmatrix} \frac{\cos \alpha - 1}{\sin \alpha} \\ 1 \end{pmatrix} \mid \beta \in \mathbb{R} \right\} &= \left\{ \beta \begin{pmatrix} -\tan \frac{\alpha}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \mid \beta \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \beta \begin{pmatrix} -\sin \frac{\alpha}{2} \\ \cos \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \mid \beta \in \mathbb{R} \right\}, \end{aligned}$$

denn mit Hilfe der Additionstheoreme läßt sich zeigen

$$\begin{aligned} \frac{\cos \alpha - 1}{\sin \alpha} &= \frac{\cos \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} \right) - (\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2})}{\sin \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} \right)} \\ &= \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} \\ &= -\frac{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} \\ &= -\tan \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Der Eigenraum zum Eigenwert $\lambda_2 = 1$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \left\{ \beta \begin{pmatrix} \frac{\cos \alpha + 1}{\sin \alpha} \\ 1 \end{pmatrix} \mid \beta \in \mathbb{R} \right\} &= \left\{ \beta \begin{pmatrix} \cot \frac{\alpha}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \mid \beta \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \beta \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} \\ \sin \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \mid \beta \in \mathbb{R} \right\}, \end{aligned}$$

wobei man ebenfalls mit Hilfe der Additionstheoreme zeigen kann, dass

$$\frac{\cos \alpha + 1}{\sin \alpha} = \cot \frac{\alpha}{2}.$$

Aufgabe 7: Betrachten Sie eine Drehmatrix der Form

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

und Spiegelungsmatrizen der Form

$$B = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ \sin \beta & -\cos \beta \end{pmatrix}, \quad \beta \in \mathbb{R}$$

$$C = \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma \\ \sin \gamma & -\cos \gamma \end{pmatrix}, \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

- a) Berechnen Sie die Matrix AB .
- b) Berechnen Sie die Matrix BC .
- c) Da A , B und C in $O(2)$ liegen, sind auch die beiden Matrizen AB und BC orthogonal. Handelt es sich bei AB bzw. BC jeweils um eine Drehung oder Spiegelung?

LÖSUNG:

a)

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ \sin \beta & -\cos \beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta & \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta \\ \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta & \sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) & \sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & -\cos(\alpha + \beta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} BC &= \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ \sin \beta & -\cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma \\ \sin \gamma & -\cos \gamma \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma & \cos \beta \sin \gamma - \sin \beta \cos \gamma \\ \sin \beta \cos \gamma - \cos \beta \sin \gamma & \sin \beta \sin \gamma + \cos \beta \cos \gamma \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \beta \cos(-\gamma) - \sin \beta \sin(-\gamma) & -\cos \beta \sin(-\gamma) - \sin \beta \cos(-\gamma) \\ \sin \beta \cos(-\gamma) + \cos \beta \sin(-\gamma) & -\sin \beta \sin(-\gamma) + \cos \beta \cos(-\gamma) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\beta - \gamma) & -\sin(\beta - \gamma) \\ \sin(\beta - \gamma) & \cos(\beta - \gamma) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- c) Bei der Matrix AB handelt es sich um eine Spiegelung und bei der Matrix BC handelt es sich um eine Drehung.