

Aufgabe 47: Betrachten Sie die Gleichungen:

$$h(x, y, z) := x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$g(x, y, z) := x - z = 0$$

$$\mathbf{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} h(x, y, z) \\ g(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Welche Figuren schneiden sich hier? Was ist die Schnittmenge dieser Figuren? Fertigen Sie eine Skizze der Situation an.
- Finden Sie einen Punkt P auf der Schnittmenge mit $x = 1$.
- Berechnen Sie den Gradienten $\nabla h, \nabla g$ an dem Punkt P und nutzen sie, um einen Tangentenvektor der Schnittmenge zu finden.

Aufgabe 48: Betrachten Sie die Kurve

$$\gamma(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \cos(2\pi t) \\ e^t \sin(2\pi t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

mit $t \in [0, 2]$.

- Berechnen Sie die Punkte $\gamma(\frac{i}{4})$, $i = \{0, \dots, 8\}$, und skizzieren Sie die Kurve.
- Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve.
- Bestimmen Sie die Krümmung der Kurve.

Aufgabe 49: Betrachten Sie die Fläche

$$A := \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} \leq 1, x_1 > 0 \right\}.$$

- Zeichnen Sie die Fläche A .
- Berechnen Sie den Flächeninhalt von A .
- Berechnen Sie den Schwerpunkt von A , wenn die Dichte $\rho \equiv 1$ konstant ist.