Numerical Algorithms

Winter Semester 2014/2015
Dozent: Prof. Dr. Beuchler
Assistent: Katharina Hofer

universitätbonn

Aufgabenblatt 3.

Abgabedatum **Theorie: 28.10.2014, Programmierbeispiele: 4.11.2014**.

Hinweis zu den Programmieraufgaben: Das Programm (mit Musterlösungen der ersten Programmieraufgaben und inklusive der Klassen FE1D und Functor1D) wird erst am Donnerstag nach der Übung ausgesandt.

1. **C++/C. [5 Punkte.]** Masse- und Steifigkeitsmatrix: Verwende die skalierten integrierten Legendre-Polynome $\hat{K}_n(x)$ als 1d-Basis. (Hinweis: Verwendung der Klasse FE1D und Implementation der Routine

   ```
   SparseMatrix FE1D::get_matrix(double a, double c);
   ```

   wobei a, c Konstanten aus der Differentialgleichung $-au'' + c \cdot u = f$ sind. Es ist anzuraten, die Masse- und Steifigkeitseinträge zu addieren, bevor sie in der SparseMatrix gespeichert werden. Zum Testen für verschiedene Polynomgrade kann der Polynomgrad polyDeg_ in FE1D explizit gesetzt werden. Zur Überprüfung der Ergebnisse kann die erste Theorieaufgabe des zweiten Aufgabenblattes verwendet werden.)

   (a) Implementiere die Berechnung der Massematrix

   $$\int_{-1}^{1} \hat{K}_i(x)\hat{K}_j(x)dx$$

   auf dem Referenzintervall $[-1, 1]$.

   (b) Implementiere die Berechnung der Steifigkeitsmatrix

   $$\int_{-1}^{1} \hat{K}_i'(x) \cdot \hat{K}_j'(x)dx$$

   auf dem Referenzintervall $[-1, 1]$.

   (c) Test: Berechne die Massematrix für die Polynomgrade $p = 1, 3$ auf dem Referenzintervall.

   (d) Test: Berechne die Steifigkeitsmatrix für die Polynomgrade $p = 1, 3$ auf dem Referenzintervall.

   (e) Erweitere die Implementation um die Masse- bzw. Steifigkeitsmatrix auf einem beliebigen Intervall berechnen zu können. Teste die Implementation für $p = 3$ auf dem Intervall $[0, 1]$ mit $a = 1, c = 1$. (Hinweis: setzen von hl_ in der Klasse FE1D)

2. **C++/C. [5 Punkte.]** Berechnung der rechten Seite: Dafür kann die Gauss-Legendre Integrationsformel und die Klasse Functor1D in functor.hpp, functor.cpp verwendet werden.

(a) Implementiere die Berechnung der rechten Seite

$$\int_{-1}^{1} f(x)\hat{K}_n(x)dx$$

auf dem Referenzintervall $[-1, 1]$. Die zu programmierende Methode lautet:

```
Vector FE1D::get_rhs(const Functor1D & func) const;
```

(b) Teste mit der konstanten rechten Seite $c = 2$. Überprüfe das Ergebnis durch Umschreiben mit der Massematrix.

(c) Implementiere die Transformation eines lokalen Punktes auf dem Referenzintervall $[-1, 1]$ auf einen globalen Punkt im Intervall $[a, b]$ wobei a, b die Grenzen eines gegebenen Intervalls sind. Dazu kann

```
Point1d FE1D::get_globEvalPt(const Point1d & loc) const;
```

verwendet werden.

(d) Erweitere die Implementation in a) um die Berechnung der rechten Seite auf einem beliebiges Intervall $[a, b]$.

(e) Teste die Implementation mit $f_1(x) = 2x^3 - 4$ auf dem Intervall $[0, 1]$.

3. **Theoriebeispiel. [4 Punkte.]** Zeige dass die 2D Basisfunktionen für das Referenzquadrat $[-1, 1]^2$ aus dem letztem Aufgabenblatt eine linear unabhängige Basis bilden.

4. **Theoriebeispiel. [4 Punkte.]** Betrachte Polynome, die der Rekursion

$$\begin{aligned} \varphi_i(x) &= a_i x \varphi_{i-1}(x) + c_i \varphi_{i-2}(x) \qquad i \geq 1 \\ \varphi_0(x) &= 1 \\ \varphi_{-1}(x) &= 0 \end{aligned}$$

genügen.

(a) Berechne eine allgemeine Rekurrenzformel zur Berechnung der Einträge der Massematrix M_{ij} wobei

$$M_{ij} = \int_I g(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)\,\mathrm{d}x.$$

(b) Berechne aus a) eine Rekurrenzformel zur Berechnung der Einträge der Massematrix M_{ij} wobei $\varphi_i(x) = L_i(x)$ gelten soll.

(c) Berechne eine Rekurrenzformel zur Berechnung der Einträge der Matrix S_{ij} wobei

$$S_{ij} = \int_I g(x)L_i(x)\frac{\mathrm{d}L_j(x)}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x.$$

(Hinweis: Man verwende die Beziehung zwischen den Legendre-Polynomen und den Jacobi-Polynomen sowie die Rekurrenzformel für die Jacobi-Polynome.)

5. **Theoriebeispiel. [5 Punkte.]** Man betrachte das Referenzdreieck $\hat{T}$ mit den Knoten $V_1 = (-1, -1)$, $V_2 = (1, -1)$, $V_3 = (0, 1)$. Weiters sei

$$\hat{p}_n^{\alpha}(x) = \hat{p}_n^{\alpha,0}(x) = \int_{-1}^{x} P_{n-1}^{\alpha,0}(y)\,\mathrm{d}y \qquad n \geq 1, \qquad p_0^{\alpha,\beta}(x) = 1.$$

Die Basisfunktionen sind gegeben durch

$$\varphi_{ij}(x,y) = \hat{p}_i^0\left(\frac{2x}{1-y}\right)\left(\frac{1-y}{2}\right)^i \hat{p}_j^{2i-1}(y) \qquad i \geq 2, j \geq 1.$$

und es sei M die Massematrix mit

$$M_{ij,kl} = \int_{\hat{T}} \varphi_{ij}(x,y)\varphi_{kl}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Man entwickle ein Verfahren zur Berechnung von $M\underline{u}$ in $\mathcal{O}(p^3)$ flops.