Wissenschaftliches Rechnen I

Wintersemester 2014/15
Prof. Mario Bebendorf
Jos Gesenhues

1. Übungsblatt

Abgabe am **Dienstag**, **21.10.**

Aufgabe 1. (Typeinteilung bei Differentialgleichungen)

a) Bestimme den Typ der folgenden Differentialgleichungen für $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ bzw. $v\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$!

i) $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + u = 0$
ii) $2u_{xx} - u_{xy} + u_{yy} - 3u_x + u_y + 3u = 2xy$
iii) $4u_{xx} - 4u_{xy} - 2u_{yy} + 2u_x = \mathrm{e}^x$
iv) $v_{xx} + 2v_{xy} + 2v_{yy} + 4v_{yz} + 5v_{zz} + v_x + v_y = 0$
v) $\mathrm{e}^z v_{xy} - v_{xx} = \log(x^2 + y^2 + z^2)$

b) Skizziere die Bereiche der (x, y)-Ebene, in denen die Gleichung

$$(1 + x)u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2 u_{yy} + u_x = 0$$

elliptisch, hyperbolisch bzw. parabolisch ist!

Aufgabe 2. (Zur Stabilität von Verfahren zur Lösung der Transportgleichung)

Untersucht werden Verfahren zur Lösung der Transportgleichung (1.8) aus der Vorlesung.

a) Zeige, dass das Verfahren, das durch die Diskretisierung

$$\partial_t^+ u_j^n + b\partial_x^0 u_j^n = 0$$

gewonnen wird, instabil ist! Nimm dabei an, dass die Lösung periodisch in x ist, sodass $u_0^n = u_J^n$ für ein $J \in \mathbb{N}$ gilt!

b) Zeige, dass das Friedrichs-Verfahren

$$u_j^{n+1} = \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2} - b\frac{\Delta t}{\Delta x}\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2}$$

stabil ist, falls $-1 \leq b\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$ gilt!

Hinweis: Verwende $U^n := (u_j^n)_{j=0,\ldots,M}$ und zeige $\left\|U^{n+1}\right\|_1 \leq \|U^n\|_1$!

Aufgabe 3. (Konsistenz des Lax-Wendroff-Verfahrens)

Das Lax-Wendroff-Verfahren zur Lösung der linearen Transportgleichung (1.8) aus der Vorlesung ist gegeben durch

$$u_j^{n+1} = u_j^n - b\frac{\Delta t}{2\Delta x}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + b^2\frac{(\Delta t)^2}{2(\Delta x)^2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n).$$

Zeige die Konsistenz zweiter Ordnung dieses Verfahrens, d.h. schätze den Konsistenzfehler

$$\tau_j^n := \partial_t u(x_j,t_n) + b\partial_x u(x_j,t_n) - \partial_t^+ u(x_j,t_n) - b\partial_x^0 u(x_j,t_n) + b^2\frac{\Delta t}{2}\partial_x^+\partial_x^- u(x_j,t_n)$$

durch $\mathcal{O}\big((\Delta t)^2 + (\Delta x)^2\big)$ ab!

Aufgabe 4. (Eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung)

Es sei u_0 eine in $\mathbb{R}$ beschränkte und stetige Funktion und

$$u(x,t) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} u_0(s)\mathrm{e}^{-\frac{(x-s)^2}{4t}}\,\mathrm{d}s.$$

Argumentiere, warum die Funktion u für $t > 0$ beliebig oft stetig differenzierbar ist und zeige, dass sie das Anfangswertproblem löst! Dabei werden die Anfangswerte in dem Sinne angenommen, dass u für $(x,t) \to (x_0, 0)$ gegen $u_0(x_0)$ strebt.

Hinweis: Zeige für die Abschätzung von $|u(x,t) - u_0(x_0)|$ zunächst, dass

$$u(x,t) = u_0(x_0) + \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\big[u_0(s) - u_0(x_0)\big]\mathrm{e}^{-\frac{(x-s)^2}{4t}}\,\mathrm{d}s$$

gilt und zerlege das Integral in Integrale über $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ und $(-\infty, x_0-\delta)\cup(x_0+\delta,\infty)$!

Kriterien für die Prüfungszulassung

Für jede richtig bearbeitete Aufgabe gibt es vier Punkte. Sowohl bei den Theorieaufgaben als auch bei den unregelmäßig erscheinenden Programmieraufgaben sind über das Semester 50% der zu erreichenden Punkte für die Prüfungszulassung erforderlich. Die Abgabe sollte zu Beginn des Semesters in Gruppen bis zu *vier* Personen erfolgen. Später wird die Gruppengröße reduziert werden.