Wissenschaftliches Rechnen I

Wintersemester 2014/15
Prof. Mario Bebendorf
Jos Gesenhues

2. Übungsblatt

Abgabe am **Dienstag**, **28.10.**

Aufgabe 1. (Diskretisierungen der Wärmeleitungsgleichung)

Untersuche die folgenden Verfahren zur Diskretisierung der homogenen Wärmeleitungsgleichung jeweils auf Konsistenz und Stabilität!

a) Leapfrog-Schema

$$u_j^{n+1} - u_j^{n-1} - 2\mu(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n) + 4\mu u_j^n = 0$$

b) du-Fort–Frankel-Schema

$$u_j^{n+1} - u_j^{n-1} - 2\mu\big[u_{j-1}^n - (u_j^{n+1} + u_j^{n-1}) + u_{j+1}^n\big] = 0$$

Aufgabe 2. (Glättungseigenschaft der Wärmeleitungsgleichung)

Betrachtet wird die Anfangs-Randwertaufgabe $\partial_t u = \partial_x^2 u$ mit $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ für $t > 0$ und $u(x,0) = u_0(x)$.

a) Leite durch Separation der Variablen die folgende Lösungsdarstellung her:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \mathrm{e}^{-k^2 t} \sin(kx) \qquad \text{mit} \qquad c_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u_0(x) \sin(kx)\, \mathrm{d}x$$

b) Zeige, dass $\|u_t(\cdot,t)\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 k^4 \mathrm{e}^{-2k^2 t}$ gilt!

c) Zeige, dass für $t \geq \sigma > 0$ eine nur von σ abhängige Konstante $M > 0$ existiert, so dass $\|u_t\| \leq M$ ist!

d*) Zeige, dass in der Umgebung von $t = 0$ keine gleichmäßige Beschränktheit erwartet werden kann! Betrachte dazu $u_0(x) := \pi - x$ als Anfangswerte und zeige, dass sich $\|u_t\|$ in der Umgebung von null wie $t^{-3/4}$ verhält!

Bemerkung: Nur bei glattem u_0 (mit $u_0(0) = u_0(\pi) = 0$) fallen die Fourier-Koeffizienten c_k hinreichend schnell, sodass ein besseres Verhalten um null zu erwarten ist.

Aufgabe 3. (Eindimensionale Wellengleichung I)

Betrachtet wird das Cauchy-Problem $u\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $(x,t) \mapsto u(x,t)$, mit

$$\partial_t^2 u = c^2 \partial_x^2 u, \qquad u(x,0) = f(x), \qquad \partial_t u(x,0) = g(x).$$

Leite durch Transformation auf die charakteristischen Variablen $\xi = x+ct$ und $\eta = x-ct$ her, dass

$$u(x,t) = \frac{1}{2} f(x-ct) + \frac{1}{2} f(x+ct) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma$$

eine Lösung des Cauchy-Problems darstellt!
Welche Glattheitsvoraussetzungen müssen an f und g gestellt werden?

Aufgabe 4. (Eindimensionale Wellengleichung II)

Zeige, dass das Randwertproblem

$$\partial_t^2 u = \partial_x^2 u, \qquad u(x,t) = f(x,t) \quad \text{auf} \quad \Gamma := \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \colon |x| + |t| = 1\},$$

auf dem Gebiet $\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \colon |x| + |t| < 1\}$ für Funktionen $f \in C^1(\Gamma)$ schlecht gestellt ist, d.h., dass bereits kleinste Datenstörungen das Randwertproblem unlösbar machen!
