Wissenschaftliches Rechnen I

Wintersemester 2014/15
Prof. Mario Bebendorf
Jos Gesenhues

universitätbonn

3. Übungsblatt

Abgabe am **Dienstag, 04.11.**

Aufgabe 1. (Eindimensionale Flachwassergleichungen)

Die zeitliche Entwicklung der reibungsfreien Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit wird durch die nichtlinearen sog. Flachwassergleichungen modelliert. Dabei setzt man voraus, dass die Höhe der Flüssigkeit wesentlich kleiner als ihre horizontale Ausdehnung ist. In einer Dimension haben sie die folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} \partial_t h + \partial_x(uh) &= 0, \\ \partial_t(uh) + \partial_x\left(u^2 h + \frac{1}{2}gh^2\right) &= 0, \qquad g = \text{const}, \end{aligned} \tag{$*$}$$

wobei $h = h(x,t)$ die Höhe und $u = u(x,t)$ die Geschwindigkeit der Flüssigkeit im Punkt $x \in [a,b]$ zur Zeit $t \geq 0$ angibt und $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$ die mittlere Erdbeschleunigung ist.

a) Zeige, dass das System $(*)$ äquivalent zum System

$$\partial_t \varphi + \partial_x(u\varphi) = 0, \qquad \partial_t u + \partial_x\left(\frac{1}{2}u^2 + \varphi\right) = 0,$$

ist und sich dieses in der quasilinearen Form $\partial_t U + A(U)\partial_x U = 0$ mit $U := (\varphi, u)$ schreiben lässt. Berechne die Eigenwerte von A, die als Wellengeschwindigkeit des Systems interpretiert werden können.

b) Das System $(*)$ lässt sich desgleichen in der Form $\partial_t \tilde{U} + \partial_x f(\tilde{U}) = 0$ mit $\tilde{U} := (h, uh)$ schreiben. Berechne sowohl Eigenwerte als auch Eigenvektoren von $Df(\tilde{U})$.

Aufgabe 2. (Fundamentallösung zur Laplace-Gleichung)

Es sei $a \in \mathbb{R}^d$ mit $d \in \{2,3\}$ und Δ der Laplace-Operator in zwei bzw. drei Dimensionen. Zeige, dass die Funktion

$$u(x) := \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\log\|x-a\|_2\,, & \text{falls } d = 2, \\ \frac{1}{4\pi\|x-a\|_2}, & \text{falls } d = 3, \end{cases}$$

der Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$ in $\mathbb{R}^d \backslash \{a\}$ (ohne Randbedingungen) genügt und dass für den Gradienten

$$\nabla u(x) = \begin{cases} -\frac{x-a}{2\pi\|x-a\|_2^2}, & \text{falls } d = 2, \\ -\frac{x-a}{4\pi\|x-a\|_2^3}, & \text{falls } d = 3, \end{cases}$$

gilt.

Aufgabe 3. (Fehlende stetige Abhängigkeit von den Daten bei der Laplace-Gleichung)

Die Lösung der Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$ in $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > 0\}$ mit den Randbedingungen $u(0,y) = 0$ und $\partial_x u(0,y) = 0$ ist offenbar $u = 0$.
Zeige durch Betrachtung der gestörten Randdaten $u(0,y) = 0$ und $\partial_x u(0,y) = \varepsilon \sin(y/\varepsilon)$, dass die Lösung für dieses Problem nicht stetig von den Daten abhängt.

Aufgabe 4. (Greensche Funktion — ein Beispiel)

Gegeben sei die sog. Greensche Funktion $G(x,y) := \frac{1}{2}\big((1-x)|y| + x|y-1| - |x-y|\big)$ zum Intervall $(0,1)$. Zeige, dass die Funktion

$$u(x) := \int_0^1 G(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y + g(x) \quad \text{mit} \quad g(x) := g_0 + x(g_1 - g_0), \quad g_0, g_1 \in \mathbb{R},$$

eine Lösung des Randwertproblems

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \qquad \text{auf } (0,1), \\ u(0) &= g_0, \\ u(1) &= g_1, \end{aligned}$$

ist, wobei $f \in C\big([0,1]\big)$ vorgegeben sei.
