Wissenschaftliches Rechnen I

Wintersemester 2014/15
Prof. Mario Bebendorf
Jos Gesenhues

universitätbonn

4. Übungsblatt

Abgabe am **Dienstag, 11.11.**

Aufgabe 1. (Diskretisierung der Helmholtz-Gleichung)

Betrachtet wird die Helmholtz-Gleichung

$$-\Delta u + k^2 u = f \quad \text{auf } [0,1]$$

mit $k \in \mathbb{R}$ und $u(0) = g_0$ sowie $u(1) = g_1$, wobei $g_0, g_1 \in \mathbb{R}$ fest vorgegeben sind.
Wie lautet das entstehende lineare Gleichungssystem, wenn die zweite Ableitung durch die Vorwärts-Rückwarts-Differenz $\partial^+\partial^-$ diskretisiert wird?

Aufgabe 2. (Zum schwachen Maximum-Prinzip)

Es seien Ω eine offene, beschränkte Menge und $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ harmonisch in Ω mit Funktionswerten g_1 bzw. g_2 auf dem Rand $\partial\Omega$. Zeige die folgenden Aussagen:

a) Aus $g_1 \leq g_2$ folgt $u_1 \leq u_2$ in Ω.

b) Ist Ω zusammenhängend und gilt zusätzlich $g_1(x) < g_2(x)$ in einem Punkt $x \in \partial\Omega$, so folgt sogar $u_1 < u_2$ in Ω.

Aufgabe 3. (Symmetrie der Koeffizientenmatrix)

a) Eine Matrix $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt Permutationsmatrix, falls $w := Pv$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$ die Einträge $w_i = v_{\pi(i)}$ besitzt, wobei π eine Permutation der Indizes $\{1, \ldots, n\}$ ist.

Zeige, dass P orthogonal ist.

b) Es sei I eine Indexmenge mit n Elementen und $c_{\alpha\beta} \in \mathbb{R}$ für $\alpha, \beta \in I$ gegeben. Für eine Anordnung $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ der Indizes aus I sei die Matrix $A_{ij} := c_{\alpha_i\alpha_j}$ definiert. Ferner sei B die Matrix, die zu einer zweiten Anordnung $\beta_1, \ldots, \beta_n$ gehört.

Zeige, dass eine Permutationsmatrix P existiert, sodass $B = PAP^T$ gilt.

c) Es gelte $c_{\alpha\beta} = c_{\beta\alpha}$ für alle $\alpha, \beta \in I$.

Zeige, dass dann für jede Anordnung die zugehörige Matrix symmetrisch ist.

Aufgabe 4. (Randnahe Punkte)

Um die zweite Ableitung einer Funktion $u(x)$, $x \in (x_1, x_2)$, zu approximieren, verwendet man beim Shortley-Weller-Verfahren dividierte Differenzen, sodass

$$u''(x) = \frac{2}{x_2 - x_1} \left(\frac{u(x_2) - u(x)}{x_2 - x} - \frac{u(x) - u(x_1)}{x - x_1} \right) + R(x).$$

a) Zeige, dass sich für $u \in C^3([x_1, x_2])$ der Restterm gemäß

$$|R(x)| \leq \frac{1}{3} \max\{x_2 - x, x - x_1\} \, \|u\|_{C^3([x_1,x_2])}$$

abschätzen lässt, wobei $\|u\|_{C^k([x_1,x_2])} := \max_{\ell \leq k} \left\|u^{(\ell)}\right\|_\infty$ sei.

b) Zeige, dass die Abschätzung aus (a) genauso bereits für zweifach Lipschitz-stetig differenzierbares $u \in C^{2,1}([x_1, x_2])$ mit der zugehörigen Norm gilt. Dabei sei

$$\|u\|_{C^{k,1}([x_1,x_2])} := \max_{\ell \leq k} \max \left\{ \left\|u^{(\ell)}\right\|_\infty, \sup_{\substack{x,y \in [x_1,x_2] \\ x \neq y}} \frac{|u^{(\ell)}(x) - u^{(\ell)}(y)|}{|x - y|} \right\}.$$