Wissenschaftliches Rechnen I

Wintersemester 2014/15
Prof. Mario Bebendorf
Jos Gesenhues

universitätbonn

6. Übungsblatt

Abgabe am **Dienstag**, **25.11.**

Aufgabe 1. (Ein Beispiel aus der Vorlesung)

Es sei $d \geq 2$ und $\Omega = K_1(0) \subseteq \mathbb{R}^d$. Untersuche, für welche $s \in \mathbb{R}$ die Funktion $u(x) = \|x\|^s$ im Raum $H^1(\Omega)$ liegt.

Aufgabe 2. (Schwache Ableitungen 1)

Zeige, dass die Funktion $\operatorname{sign}\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$,

$$\operatorname{sign}(x) := \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

keine schwache Ableitung besitzt.

Bemerkung: Allgemeiner kann man zeigen, dass die schwache Ableitung einer aus zwei differenzierbaren Funktionen zusammengesetzten Funktion genau dann die Zusammensetzung der klassischen Ableitungen als schwache Ableitung besitzt, wenn an der Schnittstelle kein Sprung vorliegt (vgl. auch die Betragsfunktion).

Aufgabe 3. (Schwache Ableitungen 2)

Es sei $\Omega := K_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^2 \,:\, \|x\| < 1\}$ und $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $u(x) := \log\log(2/\|x\|)$.
Zeige, dass $u \in H^1(\Omega)$ ist.

Bemerkung: Aus dieser und der ersten Aufgabe lässt sich folgern, dass sich die Dimensionsvoraussetzung des Sobolevschen Einbettungssatzes nicht wesentlich abschwächen lässt: Für $d = 1$ folgt aus eben diesem Satz, dass alle Funktionen in $H^1(\Omega)$ stetig auf $\overline{\Omega}$ sind. Die betrachteten Beispiele für $d > 1$ liegen zwar in $H^1(\Omega)$, sind aber nicht mehr stetig.

Aufgabe 4. (Poincaré-Ungleichung und kompakte Einbettung)

Betrachtet wird in dieser Aufgabe nur der Spezialfall $p = 2$. Im Beweis des Normierungssatzes von Sobolev aus der Vorlesung wurde aus der Kompaktheit der Einbettung $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ die Ungleichung

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} \leq c_1 |u|^2_{H^1(\Omega)} + c_2 \left| \int_\Omega u(x)\,\mathrm{d}x \right|^2$$

für $u \in H^1(\Omega)$ gefolgert. Für einen Würfel der Kantenlänge a gilt dabei $c_1 = k_d a^2$, wobei die Größe k_d nur von der Dimension d abhängt.

Schließe nun umgekehrt für diesen Spezialfall von der Gültigkeit der Ungleichung auf die Kompaktheit der Einbettung $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$.

Hinweise: Zu zeigen ist, dass zu jeder beschränkten Folge $(u_n) \subset H^1(\Omega)$ eine bezüglich der L^2-Norm konvergente Teilfolge existiert (Cauchy-Kriterium!). Unterteile dazu das Gebiet Ω in kleinere Würfel geeigneter Kantenlänge, auf denen zum einen die u_n durch gewisse konstante Funktionen ersetzt werden und zum andern die gegebene Ungleichung angewendet wird.