9. Übungsblatt

Abgabe am **Dienstag**, **16.12.**

Aufgabe 1. (Parallelogramm-Elemente)

Es bezeichne $\hat{\tau} := [0,1]^2$ das Referenzviereck mit seinen im positiven Drehsinn numerierten Ecken $\hat{a}_i$, $i = 1, \ldots, 4$, beginnend bei $\hat{a}_1 = (0,0)$. Eine Abbildung $\varphi\colon \hat{\tau} \to \mathbb{R}^2$ ist bilinear, wenn φ in jeder Variable separat affin ist, wenn also $\varphi(x,y) = c_1 + c_2 x + c_3 y + c_4 xy$ mit Konstanten $c_i \in \mathbb{R}^2$ gilt. Die ebenfalls im positiven Drehsinn numerierten Ecken eines beliebigen Vierecks τ seien mit a_i bezeichnet. Zeige die folgenden Aussagen:

a) Es gibt genau eine bilineare Abbildung φ mit $\varphi(\hat{a}_i) = a_i$ für $i = 1, \ldots, 4$. Stelle die Funktion φ als Konvexkombination ihrer Werte in den Knoten dar.

b) Die Funktion φ bildet $\hat{\tau}$ genau dann bijektiv auf τ ab, wenn τ konvex ist.

c) Die Funktion φ ist genau dann linear, wenn τ ein Parallelogramm ist.

Bemerkung: Parallelogramm-Elemente können, um bei der Diskretisierung flexibler zu sein, zusätzlich zu Dreieck-Elementen Verwendung finden.

Aufgabe 2. (Triangulierung)

Es sei Ω ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $\mathcal{T}_h$ eine zulässige Triangulierung von Ω durch Dreiecke.
Zeige, dass die Anzahl der Elemente plus die Anzahl der Knoten minus die Anzahl der Kanten stets eins ist. Gilt die Aussage auch für beliebige zulässige Zerlegungen? Warum gilt die Aussage nicht für mehrfach zusammenhängende Gebiete?

Aufgabe 3. (Bramble-Hilbert-Lemma)

Beweise Lemma 2.61 aus der Vorlesung für den Fall $d = 2$ und $k = 1$, indem du

$$\mathfrak{I}v := \frac{\int_\Omega v \,\mathrm{d}x}{\int_\Omega 1 \,\mathrm{d}x}$$

als Interpolationsoperator verwendest.

Aufgabe 4. (Aubin-Nitsche)

Wie erhält man durch Anwendung des Lemmas von Aubin–Nitsche die Abschätzung

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq ch^2 |u|_{H^2(\Omega)}$$

für den Finite-Elemente-Fehler aus Bemerkung (b) nach Satz 2.63 der Vorlesung?
