Wissenschaftliches Rechnen I

Wintersemester 2014/15
Prof. Mario Bebendorf
Jos Gesenhues

universitätbonn

10. Übungsblatt

Abgabe am **Dienstag, 13.01.**

Aufgabe 1. (Approximationssatz und kompakte Einbettung)

Aus dem Approximationssatz 2.63 folgt für $d = 2$ unter bestimmten Voraussetzungen an den Rand des Gebiets Ω sowie an die Triangulierung für $u \in H^2(\Omega)$ die Abschätzung

$$\|u - \mathfrak{I}_h u\|_{H^1(\Omega)} \leq ch \|u\|_{H^2(\Omega)} .$$

Zeige, wie sich aus dieser Ungleichung die Kompaktheit der Einbettung $H^2(\Omega) \hookrightarrow H^1(\Omega)$ folgern lässt.

Aufgabe 2. (Hierarchische Basis — 1d-Standardbeispiel)

Es sei φ die einfache Hutfunktion mit $\varphi(x) = 1 - |x|$ für $x \in [-1, 1]$ und $\varphi(x) = 0$ sonst. Damit seien für $x \in [0, 1]$

$$\varphi_i^{(k)}(x) := \varphi(2^k x - i), \qquad 0 \leq i \leq K := 2^k, \qquad k \in \mathbb{N}_0,$$

Basisfunktionen von $V_k := \operatorname{span}\{\varphi_i^{(k)} : 0 \leq i \leq K\}$, dem Raum der stückweise linearen Funktionen auf $[0, 1]$. Ferner sei $W_k = \operatorname{span}\left\{\varphi_i^{(k)} \,:\, i \in \{1, 3, 5, \ldots, 2^k - 1\}\right\}$.
Zeige folgende Aussagen:

a) Es ist $V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots$

b) Es gilt $V_k = V_{k-1} \oplus W_k$ für $k \in \mathbb{N}$ und damit $V_k = V_0 \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_k$.

c) Die durch die Zerlegung aus (b) gegebene Basis in V_k ist die hierarchische Basis.

Aufgabe 3. (Triangulierung einer Tanne)

Gib eine zulässige Triangulierung des Gebietes Ω aus Abb. 1 an. Ist es möglich, eine nicht-entartete bzw. (quasi)-uniforme Familie von Zerlegungen zu konstruieren?

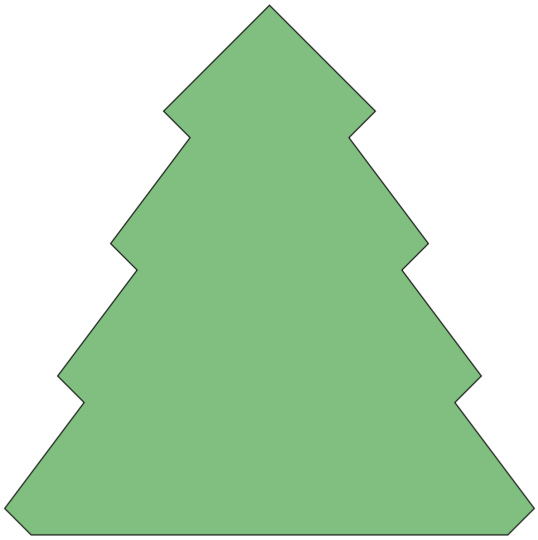

Abbildung 1: Gebiet Ω

Abgabe der Programmieraufgabe am 14.01. oder am 15.01. in der Übung

Programmieraufgabe. (Finite-Elemente-Methode in 2D — Teil II: Problemlösung)

Nachdem auf Übungsblatt 8 die Steifigkeitsmatrix im CRS-Format zum Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

erzeugt wurde, soll es nun für $f \equiv 1$ auf den durch `Tanne_h1.txt` bzw. `Tanne_h2.txt` gegebenen Triangulierungen gelöst werden.

(i) Schreibe eine Funktion zur Multiplikation einer CRS-Matrix mit einem Vektor.

(ii) Diskretisiere nun die rechte Seite der zugehörigen Variationsgleichung und löse das Gleichungssystem zum Beispiel mithilfe des CG-Verfahrens oder eines anderen geeigneten Verfahrens.

Zusatz: Visualisiere das Ergebnis (z. B. mit `gnuplot`).

Hinweis: Studierende, denen das fertige Programm aus der letzten Programmieraufgabe nicht zur Verfügung steht, können für die CRS-Matrizen die Dateien `tanne1CRS.txt` bzw. `tanne2CRS.txt` auslesen. Dabei haben die beiden Dateien folgende Struktur:

Zeile	Inhalt	Erklärung
1	`M`	Anzahl der Nichtnulleinträge der Matrix
2	`N`	Spalten- bzw. Zeilenanzahl
3	`A1 A2 ... AM`	Menge A der Nichtnulleinträge
4	`jA1 jA2 ... jAM`	Spaltenindizes j_A
5	`iA1 iA2 ... iAN M`	Anfangsindizes i_A der Zeilen; Anzahl M