Algorithmische Mathematik I

Winter Semester 2015 / 2016

Prof. Dr. Sven Beuchler
Markus Siebenmorgen

universitätbonn

Aufgabenblatt 11.

Abgabedatum: **20.01.2016**.

Aufgabe 1. (Bipartite Graphen)

Es sei $G = (V, E)$ ein bipartiter Graph und N_G das zugehörige Netzwerk. Zeigen Sie, dass dann gilt

a) Zu jeder Paarung M gibt es eine $0-1$-Flussfunktion f_M für N_G, der ein $s-t$-Fluss ist, mit $\text{flow}(f_M) = |M|$.

b) Zu jeder $0-1$-Flussfunktion f für N_G, für die das Kirchhoffsche Gesetz gilt (f ist also auch ein $s-t$-Fluss), gibt es eine Paarung M_f mit $\text{flow}(f) = |M_f|$.

(5 Punkte)

Aufgabe 2. (Maximumnorm)

Zeigen Sie, dass die Maximumnorm

$$\|\cdot\|_\infty \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \|x\|_\infty = \max_{i=1,2,\dots,n} |x_i|$$

eine Norm ist.

(5 Punkte)

Aufgabe 3. (Operatornorm)

Gegeben seien zwei normierte Vektorräume $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ über $\mathbb{R}$. Desweiteren bezeichne $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ den Vektorraum der linearen Abbildungen $A \colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$. Zeigen Sie, dass die Operatornorm

$$\|\cdot\|_{\mathcal{X},\mathcal{Y}} \colon \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \to \mathbb{R}, \quad A \mapsto \|A\|_{\mathcal{X},\mathcal{Y}} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\mathcal{Y}}{\|x\|_\mathcal{X}}.$$

eine Norm ist.

(5 Punkte)

Aufgabe 4. (Rechenregeln für Operatornormen)

Zeigen Sie, dass mit den Bezeichnungen von Aufgabe 3 gilt:

a) $\|Ax\|_\mathcal{Y} \leq \|A\|_{\mathcal{X},\mathcal{Y}} \|x\|_\mathcal{X}$ für alle $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ und alle $x \in \mathcal{X}$.

b) $\|AB\|_{\mathcal{X},\mathcal{X}} \leq \|A\|_{\mathcal{X},\mathcal{X}} \|B\|_{\mathcal{X},\mathcal{X}}$ für alle $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{X})$.

c) $\|I\|_{\mathcal{X},\mathcal{X}} = 1$ für den identischen Operator I.

(5 Punkte)

Aufgabe 5. (Präsenzübung: Raum stetiger Funtionen)

a) Zeigen Sie, dass der Raum $\mathcal{C}([0,1])$ der stetigen Funktionen $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ ein reeller Vektorraum ist.

b) Offensichtlich ist die Menge $\Pi_n([0,1])$ der Polynome $p\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ von höchstens Grad n, gegeben durch die Monombasis $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$, eine Teilmenge der stetigen Funktionen. Zeigen sie, dass $\Pi_n([0,1])$ ein Untervektorraum von $\mathcal{C}([0,1])$ ist.

Programmieraufgabe 1. (Präsenzübung: Spaltensummennorm)

Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ im CSR-Format. Schreiben Sie ein C/C++ Programm, dass die *Spaltensummennorm* $\|A\|_1 := \max_{i=1,\ldots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{j,i}|$ bestimmt.

Die Präsenzübungen werden in den Programmiertutorien besprochen, die in der Woche vom 18.01.2016-22.01.2016 stattfinden.

Programmieraufgabe 2. (Matrix im CSR-Format)

Wir betrachten das zweite Beispiel in Beispiel 3.1 aus der Vorlesung, also die Matrix K_N, die aus der approximativen Lösung von partiellen Differentialgleichung entsteht. Für gegebenes $d \in \mathbb{N}$ und $n_1, \ldots, n_d \in \mathbb{N}$ definieren wir uns einen ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ wie folgt. Setze $N = \prod_{i=1}^{d} n_i$ und $V = \{k\}_{k=1}^{N}$. Desweiteren ist

$$\begin{aligned} E =& \{\{k, k+1\}\}_{k=1, k \mod n_1 \neq 0}^{N} \cup \{\{k, k+n_1\}\}_{k=1}^{k+n_1 \leq N} \cup \{\{k, k+n_1 n_2\}\}_{k=1}^{k+n_1 n_2 \leq N} \\ & \cup \ldots \cup \{\{k, k+n_1 n_2 \cdots n_{d-1}\}\}_{k=1}^{k+n_1 n_2 \cdots n_{d-1} \leq N}. \end{aligned}$$

Gemäß Gleichung (3.4) aus der Vorlesung ist die symmetrische Matrix K_N gegeben durch

$$K_{N,ij} = \begin{cases} 2d & i = j, \\ -1 & \{i,j\} \in E, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Schreiben Sie ein C/C++ Programm, dass die Matrix K_N für gegebene natürliche Zahlen $d \in \{2, 3\}$ und $n_1, \ldots, n_d$ im CSR-Format einliest. Multiplizieren Sie die Matrix anschließend mit einem Zufallsvektor $x \in \mathbb{R}^N$ und führen Sie eine Laufzeitanalyse für $d = 3$ und $n_1 = n_2 = \ldots = n_d \in \{10, 20, \ldots, 80\}$.

(7 Punkte)

Die Programmieraufgabe wird in den Wochen vom 25.01-05.02.2016 im Cip-Pool Endenicher Allee oder im Cip-Pool Wegelerstraße abgegeben/vorgestellt. In den Wochen vom 18.01-29.01.2016 werden in den Cip-Pools Listen für die Abgabe aushängen.