Algorithmische Mathematik I

Winter Semester 2015 / 2016
Prof. Dr. Sven Beuchler
Markus Siebenmorgen

universitätbonn

Aufgabenblatt 12.

Abgabedatum: **27.01.2016**.

Aufgabe 1. (Induzierte Operatornorm)
Zeigen Sie, dass die Zeilenbetragssummennorm

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}| \qquad \text{für } A \in \mathbb{R}^{n\times m}$$

von der Maximumsnorm

$$\|\cdot\|_\infty \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \|x\|_\infty = \max_{i=1,2,\ldots,m} |x_i|$$

induziert wird.

(5 Punkte)

Aufgabe 2. (Tridiagonalmatrizen)
Gegeben sei eine Tridiagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{n-1\times n-1}$ mit

$$D = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma & & 0 \\ \beta & \alpha & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \gamma \\ 0 & & \beta & \alpha \end{bmatrix}, \quad \beta\gamma > 0.$$

a) Zeigen Sie, dass die Eigenwerte von D gegeben sind durch

$$\lambda_k = \alpha + 2\sqrt{\beta\gamma}\,\mathrm{sign}(\beta)\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right), \qquad \text{für } k = 1, \ldots, n-1.$$

und dass für die zugehörigen Eigenvektoren $v_1, \ldots, v_n$ die Darstellung

$$v_{k,i} = \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{\frac{i-1}{2}} \sin\left(\frac{ik\pi}{n}\right), \qquad \text{für } i, k = 1, \ldots, n-1$$

gilt, wobei $v_{k,i}$ die i-te Komponente von v_k bezeichnet.

b) Folgern Sie daraus, dass für $\gamma = \beta = -1$ und $\alpha = 2$ gilt

$$\lambda_k = 4\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right).$$

(5 Punkte)

Aufgabe 3. (Gram-Schmidt Orthonormalisierung)

Gegeben seien die drei komplexen Vektoren

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, \qquad a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \\ i \end{pmatrix}, \qquad a_3 = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4.$$

Wenden Sie das Verfahren von Gram-Schmidt zum orthonormalisieren der Vektoren a_1, a_2, a_3 bezüglich des unitären Skalaproduktes

$$s(x,y) = y^* x = \sum_{j=1}^{4} \overline{y}_j x_j.$$

an.

(5 Punkte)

Aufgabe 4. (unitäre Matrizen)

Gegeben seien zwei Matrizen $P, Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Zeigen Sie:

a) P ist genau dann unitär, falls die Spalten eine Orthonormalbasis des $\mathbb{C}^n$ bezüglich des unitären Skalarproduktes bilden.

b) Das Produkt $P \cdot Q$ ist unitär falls P und Q unitär sind.

c) Ist P unitär, so auch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}.$$

(5 Punkte)

Aufgabe 5. (Präsenzaufgabe: Kondition von Matrizen)

Berechnen Sie die Kondition der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

bezüglich der Spaltenbetragssummennorm, der Zeilenbetragssummennorm und der Spektralnorm.

Die Präsenzübung wird in den Tutorien besprochen, die in der Woche vom 25.01.2016-29.01.2016 stattfinden.

Programmieraufgabe 1. (Zusatzaufgabe: Gram-Schmidt Orthonormalisierung)

Gegeben sei eine reguläre Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Schreiben Sie ein C/C++ Programm, dass die Spalten der Matrix bezüglich der euklidischen Norm mit Hilfe des Gram-Schmidt Verfahrens orthonormalisiert. Testen Sie Ihr Programm anhand den Spalten der Matrix A aus der Präsenzaufgabe und anhand den Spalten der Matrix D aus Aufgabe 2 für $\alpha = 2, \beta = -1, \gamma = -1$ und $n = 10$.

(10 Punkte)

Die Programmieraufgabe ist eine Zusatzaufgabe. Das heisst die Punkte zählen nicht mehr zur Berechnungsgrundlage für die Klausurzulassungsbedingung, können aber von denjenigen genutzt werden denen noch Punkte für die Zulassung im Programmierteil fehlen. Natürlich darf die Aufgabe auch von allen anderen Studenten abgegeben werden.

Die Programmieraufgabe wird in den Wochen vom 01.02-12.02.2016 im Cip-Pool Endenicher Allee oder im Cip-Pool Wegelerstraße abgegeben/vorgestellt. In den Wochen vom 25.01-05.02.2016 werden in den Cip-Pools Listen für die Abgabe aushängen.