Algorithmische Mathematik I

Winter Semester 2015 / 2016
Prof. Dr. Sven Beuchler
Markus Siebenmorgen

universitätbonn

Aufgabenblatt 13.

Abgabedatum: **03.02.2016**.

Aufgabe 1. (Gaußsche Eliminationsverfahren)

Lösen Sie mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren das Gleichungssystem $Ax = b$ für

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 & -2 \\ -3 & 4 & -1 & 7 \\ -12 & 10 & -11 & 16 \\ 3 & 5 & 17 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 13 \\ 3 \\ -20 \\ 47 \end{pmatrix}.$$

(5 Punkte)

Aufgabe 2. (LU-Zerlegung mit Pivotsuche)

Lösen Sie mit dem Gaußschen Verfahren mit Spaltenpivotisierung das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 & 3 \\ 6 & -2 & 3 & 4 \\ -6 & 6 & -3 & -6 \\ 12 & 4 & -2 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}$$

Geben Sie L, U und die Permutationsmatrix P an.

(5 Punkte)

Aufgabe 3. (Cholesky-Zerlegung)

Berechnen Sie die Cholesky–Zerlegung $R^\intercal R$ der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 20 & -7 \\ 2 & -7 & 30 \end{bmatrix}.$$

(5 Punkte)

Aufgabe 4. (Diagonaldominanz)

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heisst *diagonaldominant*, falls

$$|a_{i,i}| \geq \sum_{k=1,=k\neq i}^{n} |a_{i,k}| \quad \text{für } i = 1, \ldots, n \text{ gilt.}$$

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reguläre, diagonaldominante Matrix. Zeigen sie, dass die LU-Zerlegung dann ohne Pivotisierung durchführbar ist und dass die bei jedem Teilschritt entstehende Matrix $A^{(i)}$ wieder diagonaldominant ist.

(5 Punkte)