Algorithmische Mathematik I

Winter Semester 2015 / 2016
Prof. Dr. Sven Beuchler
Markus Siebenmorgen

universitätbonn

Aufgabenblatt 14.

Abgabedatum: **ohne Abgabe**.

Aufgabe 1. (Tridiagonalmatrizen)

Gegeben sei die Tridiagonalmatrix

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & & & \\ b_2 & a_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & b_{n-1} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & b_n & a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Berechnen Sie die zugehörige LR-Zerlegung der Form

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ \ell_2 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ell_{n-1} & 1 & \\ & & & \ell_n & 1 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} r_1 & s_1 & & & \\ & r_2 & s_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & r_{n-1} & s_{n-1} \\ & & & & r_n \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2. (Gleichungssystem)

Lösen Sie für

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

das Gleichungssystem $Ax = b$ mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren. Geben Sie auch die LU-Zerlegung von A an.

Aufgabe 3. (Berechnung der Inversen)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix, so dass die LU-Zerlegung $A = LU$ existiert. Wie kann man die Inverse von A in $\mathcal{O}(n^3)$ bestimmen? Bestimmen Sie die Inverse der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 & -2 \\ -3 & 4 & -1 & 7 \\ -12 & 10 & -11 & 16 \\ 3 & 5 & 17 & 2 \end{pmatrix}.$$

Verwenden Sie dazu Ihre LU-Zerlegung von Blatt 13 oder von Aufgabe 4.

Aufgabe 4. (Crout-Zerlegung)

Die Crout-Zerlegung einer symmetrischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ bestimmt, ähnlich zur Cholesky-Zerlegung von symmetrisch und positiv definiten Matrizen, eine untere Dreiecksmatrix L und eine Diagonalmatrix D, so dass $A = LDL^\intercal$ ist. Die Einträge von L und D lassen sich auf direkte Weise bestimmen, d.h. ohne nach jedem Schritt eine Restmatrix $A^{(k)}$ zu ermitteln. Dies erfolgt für $j = 1, \dots, n$ sukzessiv gemäß den Formeln

$$\begin{aligned} l_{jj} &= 1, \\ d_{jj} &= a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} d_{kk} l_{jk}^2 && , \\ l_{ij} &= \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} d_{kk} l_{ik} l_{jk}\right) / d_{jj} && \text{für } i = j+1, \dots, n. \end{aligned}$$

Bestimmen sie die Crout-Zerlegung von der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$