Algorithmische Mathematik I

Winter Semester 2015 / 2016
Prof. Dr. Sven Beuchler
Markus Siebenmorgen

universitätbonn

Aufgabenblatt 4.

Abgabedatum: **18.11.2015**.

Aufgabe 1. (Kondition)

Sei $y = \varphi(x)$ die Lösung eines Problems mit reeller Eingabe und Ausgabe. Bestimmen sie die absoluten und relativen Konditionszahlen für

a) $\varphi(x) = x$,

b) $\varphi(x) = \sqrt[3]{x}, \quad x \geq 0$,

c) $\varphi(x) = 1/x$,

d) $\varphi(x) = e^x$,

e) Geben Sie für a) bis d) jeweils an, für welche x die Funktionsauswertungen gut bzw. schlecht konditioniert sind. (Es reicht eine Angabe für große/kleine Werte von $|x|$ ist das Problem absolut/relativ gut/schlecht konditioniert.)

Hinweis. Sie dürfen zur Lösung der Aufgabe voraussetzen, dass ϕ stetig differenzierbar ist und die aus der Schule bekannte Differentialrechnung verwenden.

(6 Punkte)

Aufgabe 2. (Konvergenz des Bisektionsverfahrens)

Gegeben sei eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $f(a)f(b) < 0$, die eine eindeutige Nullstelle $x^\star \in (a, b)$ besitzt. Zeigen Sie, dass die k-te Iterierte $x^{(k)}$ des Bisektionsverfahrens der Abschätzung

$$|x^{(k)} - x^\star| < \frac{1}{2^k}(b - a)$$

genügt.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. (Partialsummen der harmonischen Reihe)

Wir betrachten die Partialsummen s_n der harmonischen Reihe

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

und zeigen, dass es Konstanten $0 < c < C$ gibt mit

$$c(1 + \log_2(n)) \leq s_n \leq C(1 + \log_2(n)).$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

a) Zeigen Sie zunächst, dass die Abschätzung für alle $n = 2^j$ mit $j \in \mathbb{N}_0$ gilt.

b) Folgern Sie mit Hilfe von a), dass die Abschätzung auch für alle $2^{j-1} < n < 2^j$ gilt.

(5 Punkte)

Aufgabe 4. (Fibonacci-Folge)

Gegeben sei die Fibonacci-Folge

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad n > 2, \quad f_1 = f_2 = 1.$$

Zeigen Sie, dass die Folgeglieder der expliziten Formel von *Moivre-Binet*

$$f_n = \frac{a^n - b^n}{\sqrt{5}} \quad \text{mit} \quad a = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{und} \quad b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

genügt.

Hinweis. Zeigen sie zunächst, dass $a = 1 + \frac{1}{a}$ und $b = 1 + \frac{1}{b}$ gilt.

(5 Punkte)

Programmieraufgabe 1. (Elementare Vektoroperationen)

Implementieren Sie für die nachfolgenden Aufgaben in C/C++ geeignete Funktionen der Form

```
void PROGNAME(var1,var2,...)
```

z.B.

```
void PROGNAME(double *res, double *x, int n)
{
    // Programm-Code der Routine,
    // z.B. Berechnung des komponentenweisen Vorzeichens
    // eines Vektors x der Laenge n.
    int i;
    for (i=0 ; i<n ; ++i)
        {if (x[i]<0)
            res[i] = -1;
         else
            res[i] = 1;
         }
}
```

Gegeben seien Vektoren $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ sowie die reelle Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$. Implementieren Sie

a) das komponentenweise Maximum `VDMAX(z,x,y,n)`

$$z_i = \max\{x_i, y_i\} \qquad \text{für } i = 1, \ldots, n.$$

b) die komponentenweisen Addition `VDPLUS(z,x,y,n)`

$$z_i = x_i + y_i \qquad \text{für } i = 1, \ldots, n.$$

c) die komponentenweise Multiplikation `VDMULTVEKTOR(z,x,y,n)`

$$z_i = x_i \cdot y_i \qquad \text{für } i = 1, \ldots, n.$$

d) die Multiplikation `VDMULTZAHL(z,x,`α`,n)` des Vektors x mit der Zahl α

$$z_i = \alpha x_i \qquad \text{für } i = 1, \ldots, n.$$

e) das euklidischen Skalarprodukt `DSCAPR(`β`,x,y,n)` mit dem Ergebnis $\beta \in \mathbb{R}$

$$\beta = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

f) die komponentenweise Division `VDDIVVEKTOR(z,x,y,n)`

$$z_i = \begin{cases} x_i/y_i, & \text{falls } y_i \neq 0, \\ 0, & \text{falls } y_i = 0 \end{cases} \qquad \text{für } i = 1, \ldots, n.$$

Testen Sie ihre Funktionen anschließend indem Sie ein C/C++-Programm schreiben, dass zu einer gegebenen Länge n Zufallsvektoren $x, y \in [0,1]^n$ und eine Zahl $\alpha \in (0,1)$ einliest und die Operationen a)-e) durchführt.

(10 Punkte)

Die Programmieraufgabe wird in der Woche vom 23.11-27.11 im Cip-Pool Endenicher Allee oder im Cip-Pool Wegelerstraße abgegeben/vorgestellt. In der Woche vom 16.11-20.11 werden in den Cip-Pools Listen für die Abgabe aushängen.

Programmieraufgabe 2. (Präsenzübung: Bisektionsverfahren)

Schreiben Sie ein C/C++ Programm welches die Nullstelle der Funktion $f(x) = e^x - x^2$ auf dem Intervall $[-1, 0]$ mit Hilfe des Bisektionsverfahren berechnet/approximiert und mit einem Funktionswert kleiner einer gegebenen Genauigkeit ε abbricht.

Bemerkung. Die exakte Nullstelle kann nur mittels der *Lambertschen W-Funktion* angegeben werden und entspricht ungefähr $x = -2W(1/2) \approx -0.703467$.

Die Präsenzübung wird in der Woche 16.-20.11 in den Programmiertutorien besprochen.

Die Fachschaft Mathematik feiert am 26.11. ihre Matheparty in der N8schicht. Der VVK findet am Mo. 23.11., Di. 24.11. und Mi. 25.11. vor der Mensa Poppelsdorf statt. Alle weiteren Infos findet Ihr auf fsmath.uni-bonn.de.