



Algorithmische Mathematik I

Winter Semester 2015 / 2016
Prof. Dr. Sven Beuchler
Markus Siebenmorgen



Aufgabenblatt 7.

Abgabedatum: **09.12.2015.**

Aufgabe 1. (Binär Heaps)

Es sei die Zahlenfolge

7, 25, 172, 11, 23, 1, 43, 9, 58, 34, 12, 87, 45

gegeben.

- Bauen sie einen Heap minimaler Tiefe, der die angegebenen Zahlen enthält
- Fügen Sie die Werte 23 und 77 ein. Geben Sie hierbei die Teilschritte im Baum an.
- Entfernen Sie die Einträge 25 und 43 aus dem Baum von Teilaufgabe b) und geben Sie erneut die Teilschritte an.

(4 Punkte)

Aufgabe 2. (Kreise)

Es sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter einfacher Graph in dem jeder Knoten mindestens Grad k für $k \geq 2$ hat. Zeigen Sie die zweite Aussage von Lemma 2.3 aus der Vorlesung. Zeigen Sie also, dass es einen Kreis in G mit Mindestlänge $k + 1$ gibt.

(5 Punkte)

Aufgabe 3. (Hamilton-Kreise)

Ein Hamilton-Kreis in einem Graphen G ist ein Kreis, der jede Ecke von G genau einmal enthält. Zeigen sie, dass ein einfacher ungerichteter Graph mit $n \geq 3$ Ecken einen Hamilton-Kreis enthält, falls der Grad jeder Ecke mindestens $n/2$ ist.

Hinweis. Zeigen Sie zunächst die folgende Aussage: Es sei $G = (V, E)$ ein einfacher ungerichteter Graph mit $n \geq 3$ Knoten. Desweiteren seien v_1, v_2 zwei nicht adjazente Knoten mit Knotengrad $|\delta(v_1)| + |\delta(v_2)| \geq n$. Dann besitzt G genau dann einen Hamilton-Kreis, falls es einen Hamilton-Kreis in $\tilde{G} = (V, E \cup \{(v_1, v_2)\})$ gibt.

(6 Punkte)

Aufgabe 4. (Hyperwürfel)

Der ungerichtete und einfache Graph Q_n , der sogenannte Hyperwürfel, ist folgendermaßen definiert: Die Eckenmenge V_n besteht aus allen $\{0, 1\}$ -Folgen der Länge n , offenbar ist $|V_n| = 2^n$. Zwei Ecken $v_1, v_2 \in V$ werden genau dann durch eine Kante (v_1, v_2) verbunden, wenn sich die beiden $\{0, 1\}$ -Folgen von v_1 und v_2 an genau einer Stelle unterscheiden.

- Zeichnen Sie Q_2 und Q_3 .
- Zeigen Sie, dass Q_n für $n \geq 2$ einen Hamilton-Kreis enthält.

Hinweis. Es bietet sich an die Aussage per Induktion und konstruktiv zu zeigen.

(5 Punkte)

Programmieraufgabe 1. (Präsenzübung: heapsort)

- a) Geben Sie Pseudocodes an für die in der Vorlesung im Zusammenhang mit Heaps vorgestellten Verfahren zum Einfügen und Entfernen eines Elementes.
- b) Verifizieren Sie, dass diese Operationen in einer Laufzeit von $\mathcal{O}(\log(n))$ durchführbar sind.
- c) Schreiben Sie ein C/C++ Programm, das n Elemente mit Hilfe des Heapsorts sortiert.

Die Präsenzübung wird in der Woche 07.11-11.12 in den Programmier Tutorien besprochen.