Algorithmische Mathematik I

Winter Semester 2015 / 2016
Prof. Dr. Sven Beuchler
Markus Siebenmorgen

universitätbonn

Aufgabenblatt 8.

Abgabedatum: **16.12.2015**.

Aufgabe 1. (Zusammenhang)

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Dann bezeichnen wir mit $\overline{G} = (V, \overline{E})$ den Komplementgraph von G, in dem zwei Knoten genau dann durch eine Kante verbunden sind, wenn sie es in G *nicht* sind.
Zeigen Sie, dass dann G oder $\overline{G}$ zusammenhängend ist.

(5 Punkte)

Aufgabe 2. (Zusammenhang und Hamilton-Kreise)

Es sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter, einfacher und zusammenhängender Graph. Zeigen sie, dass der Graph keinen Hamilton-Kreis enthält, falls der Zusammenhang von G durch die Entnahme einer einzelnen Ecke und sämtlicher mit dieser Ecke inzidierender Kanten zerstört werden kann.

(5 Punkte)

Aufgabe 3. (Laufzeitkomplexität)

Beweisen Sie Lemma 2.9: Falls die Auswahl von v und w in $O(1)$ möglich ist, dann besitzt der Algorithmus 2.1 die Komplexität $O(|V| + |E|)$.

(5 Punkte)

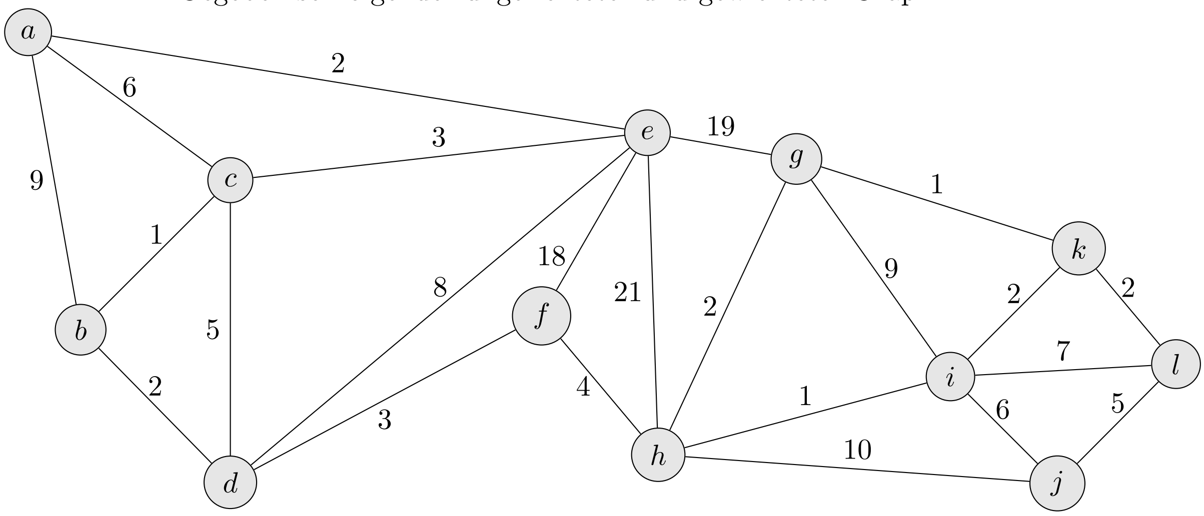
Aufgabe 4. (Topologische Ordnung)

Eine topologische Ordnung eines gerichteten Graphen $G = (V, E)$ ist eine Ordnung der Knoten $V = \{v_1, ..., v_n\}$, so dass für jede Kante $e = (v_i, v_j) \in E$ die Relation $i < j$ gilt.
Zeigen Sie, dass ein gerichteter Graph genau dann eine topologische Ordnung hat, wenn er kreisfrei ist.

(5 Punkte)

Programmieraufgabe 1. (Graphenalgorithmen)

Gegeben sei folgender ungerichteter und gewichteter Graph:



a) Lesen Sie den Grahen im CSR-Format ein.

b) Bestimmen Sie mittels der Funktion `BFS` aus `kuerzwege.h` den Baum der durch die Breitensuche ausgehend vom Startknoten a entsteht.

c) Berechnen Sie mittels der Funktion `dijkstra` aus `kuerzwege.h` die Abstände von a zu allen anderen Knoten.

d) Geben Sie einen kürzesten Weg von a nach l an.

e) Betrachten Sie nun den zu Grunde liegenden ungewichteten Graphen. Besitzt dieser einen Hamiltonkreis bzw. einen geschlossenen Eulerzug? Wenn ja, geben Sie ihn an. Wenn nein, begründen Sie dies mit Hilfe eines Kriteriums aus den Übungen.

(10 Punkte)

Programmieraufgabe 2. (Präsenzaufgabe: Hyperwürfel)

Wir betrachten den Hyperwürfel Q_n mit 2^n Ecken. Desweiteren ist der Grad jedes Knoten n.

a) Lesen Sie den Graphen abhängig von n im CSR-Format ein. Es bietet sich die Nummerierung der Knoten über die zur Dualfolge gehörige Dezimalzahl an. Dann lassen sich die zu einem Knoten inzidenten Kanten über einfaches Umwandeln von Dual- und Dezimaldarstellungen bestimmen. Weisen Sie jeder Kante ein zufälliges Gewicht zu.

b) Verwenden Sie die Funktion `dijkstra` um den schnellsten Weg von Knoten 0 zu Knoten $2^n - 1$, also zwei gegenüber liegenden Eckknoten zu bestimmen.

c) Verwenden sie die Funktion `BFS` um den Baum der durch die Breitensuche ausgehend vom Knoten 0 entsteht zu ermitteln.

d) Testen sie zudem die Laufzeit des Programms für $n = 6, 8, \ldots, 16$.

Die Präsenzübung wird in der Woche 14.12-18.12 in den Programmiertutorien besprochen.