Algorithmische Mathematik I

Winter Semester 2015 / 2016
Prof. Dr. Sven Beuchler
Markus Siebenmorgen
universitätbonn

Aufgabenblatt 9.

Abgabedatum: **23.12.2015.**

Dieser Übungszettel kann auch schon am Montag, den 21.12. vor der Vorlesung abgegeben werden.

Aufgabe 1. (kürzester Weg)

Zeigen Sie: Es sei $G(V, E, \omega)$ ein gerichteter gewichteter Graph ohne negative Zahlen. Desweiteren seien $v, u \in V$ und P ein kostenminimaler Kantenzug (also minimal bzgl. ω) von v nach u. Zeigen Sie, dass es dann in G einen $v-u-$Weg W mit $\omega(W) \leq \omega(P)$ gibt.

(5 Punkte)

Aufgabe 2. (Ein Codebuch)

Die Nachricht `babbbaabba` soll mit dem Codebuch

Text	Code	Länge
`a`	`00`	2
`b`	`010`	3
`ba`	`0110`	4
`bb`	`0111`	4
`abb`	`1`	1

codiert werden. Ein Beispiel für eine mögliche Codierung mit Gesamtlänge 20 ist:

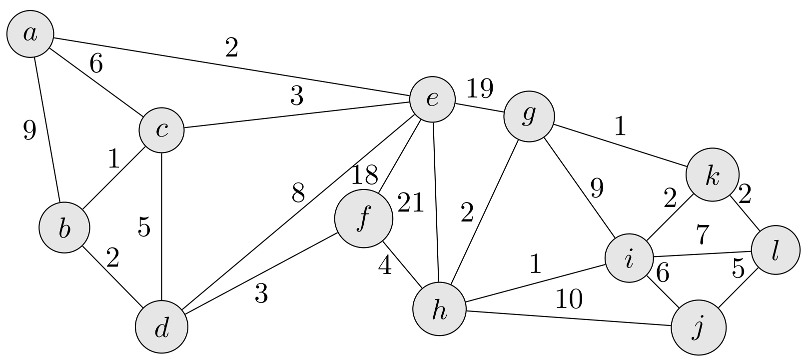
`ba`	`bb`	`ba`	`a`	`bb`	`a`
`0110`	`0111`	`0110`	`00`	`0111`	`00`

Entwerfen Sie einen geeigneten gewichteten Graphen und formulieren Sie die Aufgabe als kürzeste-Wege-Problem. Finden Sie dann eine Codierung mit minimaler Gesamtlänge.

(5 Punkte)

Aufgabe 3. (Kruskal)

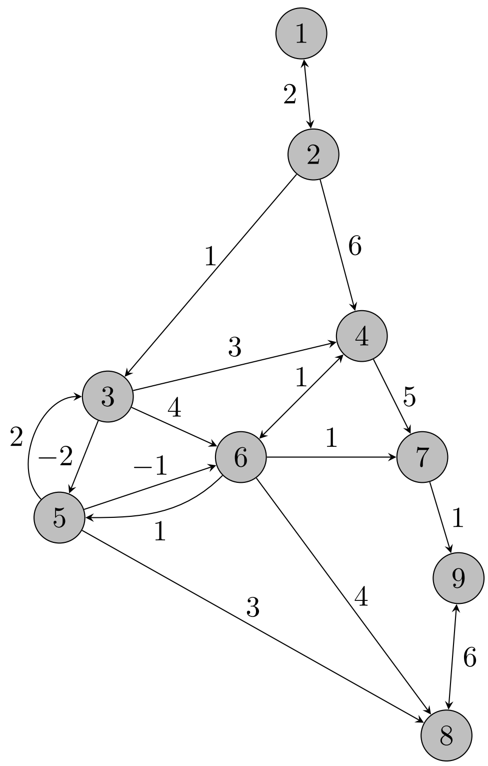
Betrachten Sie den Graphen aus Programmieraufgabe 1 von Übungsblatt 8 (siehe unten) und bestimmen Sie mit dem Algorithmus von Kruskal einen minimal spannenden Baum. Zeichnen Sie diesen.



(5 Punkte)

Aufgabe 4. (Kürzeste Wege mit negativen Gewichten)

Gegeben sei folgender Graph:



Berechnen Sie von Knoten 1 aus kürzeste Wege zu allen anderen Knoten. Geben Sie dazu als Ausgabe eine Tabelle an, in der zu jedem Knoten sein Vorgänger sowie die Distanz von 1 aus verzeichnet ist. Der Vorgänger zu Knoten 2 ist beispielsweise 1 mit Distanz 2. Verwenden Sie dazu den Moore-Bellmann-Ford Algorithmus.

(5 Punkte)

Programmieraufgabe 1. (Präsenzaufgabe: Kugel)

Die Einheitskugel im $\mathbb{R}^3$ soll mit einem Graphen dargestellt werden. Die Knoten auf einer Kugel (nicht der Einheitskugel) können wie folgt konstruiert werden: Wir starten mit einem äquidistanten Gitter auf dem Einheitsquadrat $[0,1] \times [0,1]$ mit jeweils $n+1$ Punkten entlang der Koordinatenrichtungen. Anschließend werden die Punkte $(0, y)$ mit den Punkten $(1, y)$ identifiziert, wodurch ein Zylinder entsteht. Danach zieht man die "ursprünglichen" Punkte $(x, 0)$ und $(x, 1)$ auf einen Punkt zusammen (den Mittelpunkt der Ober- bzw. Unterseite des Zylinders).

a) Überlegen Sie sich, wie man die Kanten des Graphen gewichten muss um Strecken auf der Kugel zu erhalten und stellen Sie den Graphen für $n = 4$ im CSR-Format dar.

b) Was bedeuten die Strecken auf dem Gitter des Einheitsquadrates für festes x bzw. für festes y nachdem sie auf die Kugel abgebildet worden sind?

c) Überlegen Sie sich wie man die Kreisfreiheit im Algorithmus von Kruskal überprüft.

Programmieraufgabe 2. (Minimal spannende Bäume)

Implementieren Sie den Algorithmus von Kruskal und testen Sie die Laufzeit des Programms anhand der Kugel für $n = 2^k$ und $k = 2, 4, \ldots, 12$.

(10 Punkte)

Die Präsenzübung wird in den Programmiertutorien besprochen, die an den Tagen 21.12-23.12 und 07.01-08.01 stattfinden.