Wiederholungsaufgaben
Algorithmische Mathematik 1

Wintersemester 2015
Prof. Dr. Beuchler
Dr. Markus Siebenmorgen

universitätbonn

Übungsaufgaben

Aufgabe 1. (Matrixnormen)

Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 89.3 & -33.7 & 17.1 \\ -7.0 & 18.6 & 26.2 \\ 27.9 & 103.5 & -6.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.14 \\ -0.17 \\ 2.1 \end{pmatrix}.$$

1. Wie ist die Operatornorm einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ definiert?
2. Bestimmen Sie die Zeilen- als auch die Spaltensummennorm der Matrix.
3. In welcher Norm sind dies die Operatornormen?

Aufgabe 2. (LU-Zerlegung mit Pivotsuche)

Lösen Sie mit dem Gaußschen Verfahren mit Spaltenpivotisierung das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 6 \\ 10 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Geben Sie L, U und die Permutationsmatrix P an.

(5 Punkte)

Aufgabe 3. (Cholesky)

Gegeben sei die Matrix

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 17 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

1. Zeigen Sie, dass B symmetrisch ist.
2. Bestimmen Sie die Cholesky-Zerlegung von B.
3. Ist B auch positiv definit?
4. Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Bx = c$ mit $c = [1\ 4\ 3]^\top$.
5. Welchen asymptotischen Aufwand besitzt die Berechnung der Cholesky-Zerlegung einer vollbesetzten $n \times n$ Matrix B?

Aufgabe 4. (LU-Zerlegung)

Berechnen Sie die LU-Zerlegung folgender Matrix G und deren Determinante $det(G)$:

$$G = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 6 & 3 \\ 9 & 10 & 6 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 5. (Matrix-Normen)

1. Sei $Ax = b$ und $A(x + \Delta x) = b + \Delta b$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch.
   (a) Zeigen Sie $\dfrac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \le \kappa(A)\dfrac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$.
   (b) Zeigen Sie für die Norm $\| \, . \, \|_2$, daß diese Abschätzung scharf ist.
   (Wie müssten bei gegebener Matrix A die Vektoren b und Δb gewählt werden, damit in der angegebenen Abschätzung das Gleichheitszeichen gilt?)
2. Zeigen Sie, dass der Spektralradius, der Betrag des betragsmäßig maximalen Eigenwert von A, keine Matrixnorm ist.

Aufgabe 6. Gegen sei eine allgemeine tridiagonale Matrix

$$T = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & 0 & \dots & \\ 0 & c_2 & a_3 & b_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & c_{n-2} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & c_{n-1} & a_{n-2} \end{bmatrix}$$

von der die LU-Zerlegung existiert.

1. Schreiben Sie einen Pseudocode, der die LU-Zerlegung von T in $\mathcal{O}(n)$ Operationen berechnet.
2. Ist dieser Algorithmus stabil? Wie kann er stabilisiert werden?

Aufgabe 7. Gegeben sei im $\mathbb{R}^{mn}$ die Norm

$$\|x\| = \max_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} |x_{m(i-1)+k}|$$

1. Man zeige, daß dies eine Norm ist.
2. Man schreibe einen Pseudocode, der diese Norm berechnet.