Wiederholungsaufgaben
Algorithmische Mathematik 1

Wintersemester 2015
Prof. Dr. Beuchler
Dr. Markus Siebenmorgen

universitätbonn

Übungsaufgaben

Aufgabe 1. (Matrixnormen)

Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 89.3 & -33.7 & 17.1 \\ -7.0 & 18.6 & 26.2 \\ 27.9 & 103.5 & -6.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.14 \\ -0.17 \\ 2.1 \end{pmatrix}.$$

1. Wie ist die Operatornorm einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ definiert?
2. Bestimmen Sie die Zeilen- als auch die Spaltenbetragssummennorm der Matrix.
3. In welcher Norm sind dies die Operatornormen?

Lösung.

1. Es gilt

$$\| A \| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

oder

$$\| A \| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

(1 Punkte).

2. Aus der Vorlesung/Übung gilt für eine Matrix $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$ für die Zeilenbetragssummennorm

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

und die Spaltenbetragssummennorm

$$\|A\|_1 = \max_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

(2 Punkte). Damit folgt

$$\|A\|_1 = \max\{124.2, 155.8, 49.7\} = 155.8$$

und

$$\|A\|_\infty = \max\{140.1, 51.8, 137.8\} = 140.1$$

(3 Punkte)

3. Maximumsnorm bzw. Betragssummennorm (1 Punkte)

□

Aufgabe 2. (LU-Zerlegung mit Pivotsuche)

Lösen Sie mit dem Gaußschen Verfahren mit Spaltenpivotisierung das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 6 \\ 10 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Geben Sie L, U und die Permutationsmatrix P an.

Lösung. Die erste Permutationsmatrix P_1 tauscht die erste und zweite Zeile, d.h.

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^{(1,1)} = P_1 A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad b^{(1)} = P_1 b = \begin{bmatrix} 6 \\ -7 \\ 10 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Mit dem Gauß Algorithmus folgt für L_1, dass

$$L_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^{(1)} = L_1^{-1} A^{(1,1)} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 1.5 \\ 0 & -1 & 2 & 0. \end{bmatrix}$$

Im zweiten Schritt steht das Pivot bereits an der richtigen Stelle und es ergibt sich

$$L_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^{(2)} = L_2^{-1} A^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3.5 \\ 0 & 0 & 1.5 & -1 \end{bmatrix}.$$

Die Pivotisierung liefert nun, dass die 3. und die 4. Zeile getauscht werden, also

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^{(3)} = P_1 A^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1.5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3.5 \end{bmatrix}, \quad b^{(2)} = P_2 b^{(1)} = \begin{bmatrix} 6 \\ -7 \\ -2 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Damit erhalten wir die folgenden Matrizen P, L und U:

$$P = P_2 * P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad L = L_1 * L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -0.5 & 1 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1.5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3.5 \end{bmatrix}.$$

(5 Punkte)
Durch Vorwärtseinsetzen und Rückwärtseinsetzen folgt

$$\begin{aligned} y_1 &= b_1^{(2)} = 6 \\ y_2 &= b_2^{(2)} - 0y_1 = -7 \\ y_3 &= b_3^{(2)} + y_1 + .5y_2 = -2 + 6 - 3.5 = .5 \\ y_4 &= b_4^{(2)} - .5y_1 - y_2 = 10 - 3 + 7 = 14. \end{aligned}$$

und weiter

$$\begin{aligned} x_4 &= y_4/3.5 = 4 \\ x_3 &= (y_3 + x_4)/1.5 = 3 \\ x_2 &= (y_2 + 2x_4 + x_3)/2 = 2 \\ x_1 &= (y_1 + x_4 - 4x_3 + 2x_2)/2 = 1 \end{aligned}$$

also

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

(2 Punkte)

□

Aufgabe 3. (Cholesky)

Gegeben sei die Matrix

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 17 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

1. Zeigen Sie, dass B symmetrisch ist.
2. Bestimmen Sie die Cholesky-Zerlegung von B!
3. Ist B auch positiv definit?
4. Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Bx = c$ mit $c = [1\ 4\ 3]^\top$.
5. Welchen asymptotischen Aufwand besitzt die Berechnung der Cholesky-Zerlegung einer vollbesetzten $n \times n$ Matrix B?

Lösung.

1. Es ist offenbar $B = B^\top$ (1 Punkte)
2. Nachrechnen ergibt mit $B = [b_{ij}]_{i,j=1}^3$

$$\begin{aligned} r_{11} &= \sqrt{b_{11}} = 1 \\ r_{12} &= \frac{b_{12}}{r_{11}} = \frac{4}{1} = 4 \\ r_{13} &= \frac{b_{13}}{r_{11}} = \frac{1}{1} = 1 \\ r_{22} &= \sqrt{b_{22} - r_{12}^2} = \sqrt{17 - 16} = 1 \\ r_{23} &= \frac{a_{23} - r_{12}r_{13}}{r_{22}} = 2 - 4 = -2 \\ r_{33} &= \sqrt{b_{33} - r_{13}^2 - r_{23}^2} = \sqrt{6 - 4 - 1} = 1 \end{aligned}$$

also $R = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (3 Punkte)

3. Da die Cholesky-Zerlegung exisitiert, gilt $B = R^\top R$, wobei R ein Isomorphismus ist. (1 Punkte) Damit ist $x^\top Bx = x^\top R^\top Rx = (Rx)^\top Rx = y^\top y \geq 0$ mit $y = Rx$. Da R Bijektion, folgt $x = 0$ gdw. $y = 0$. Also gilt $x^\top Bx > 0$ gdw. $x \neq 0$. (1 Punkte)
4. Es ist $Bx = R^\top Rx = c$. Wir lösen nun $R^\top y = c$ und anschließend $Rx = y$. (1 Punkte) Durch Vorwärtseinsetzen und Rückwärtseinsetzen folgt

$$\begin{aligned} y_1 &= c_1 = 1 \\ y_2 &= c_2 - 4y_1 = 4 - 4 = 0 \\ y_3 &= c_3 - y_1 + 2y_2 = 3 - 1 + 0 = 2 \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} x_3 &= y_3 = 2 \\ x_2 &= y_2 + 2x_3 = 0 + 4 = 4 \\ x_1 &= y_1 - 4x_2 - y_3 = 1 - 16 - 2 = -17 \end{aligned}$$

also

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -17 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(2 Punkte)

5. Der Aufwand beträgt nach Vorlesung $\mathcal{O}(n^3)$. (1 Punkte)

□

Aufgabe 4. (LU-Zerlegung)

Berechnen Sie die LU-Zerlegung folgender Matrix G und deren Determinante $det(G)$:

$$G = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 6 & 3 \\ 9 & 10 & 6 \end{bmatrix}$$

Lösung. Mit dem Gauß Algorithmus folgt nach längerer Rechnung mit

$$L_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_1^{-1}G = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Nun wählen wir

$$L_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

und erhalten

$$U = L_2^{-1}L_1^{-1}G = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Damit folgt

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}; U = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

, (4 Punkte). Für die Determinante gilt $det(G) = det(LU) = det(L)det(U) = 1 \cdot 6 = 6$, (2 Punkte). □

Aufgabe 5. (Matrix-Normen)

1. Sei $Ax = b$ und $A(x + \Delta x) = b + \Delta b$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und regulär.
   (a) Zeigen Sie $\dfrac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \kappa(A)\dfrac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$!
   (b) Zeigen Sie für die Norm $\| \,.\, \|_2$, daß diese Abschätzung scharf ist!
   (Wie müssten bei gegebener Matrix A die Vektoren b und Δb gewählt werden, damit in der angegebenen Abschätzung das Gleichheitszeichen gilt?)
2. Zeigen Sie, dass der Spektralradius, d.h. der betragsgrößte Eigenwert von A keine Matrixnorm ist.

Lösung.

1. Die erste Aussage wurde in der Vorlesung gezeigt, (1 Punkte). A besitzt nach der Vorlesung eine orthonormale Basis an reellen Eigenvektoren v_i mit zugehörigen Eigenwerten λ_i, $i = 1, \ldots, n$ mit $0 < |\lambda_1| \leq \ldots \leq |\lambda_n|$. Dann ist nach der Vorlesung (1 Punkte)

$$\|A\|_2 = |\lambda_n|, \quad \|A^{-1}\|_2 = |\lambda_1|^{-1},$$

also $\kappa_2(A) = \frac{|\lambda_n|}{|\lambda_1|}$, (1 Punkte). Wir setzen nun $b = \lambda_n v_n$ und $\Delta b = \varepsilon\lambda_1 v_1$, (1 Punkte) Dann ergibt sich $x = A^{-1}b = v_n$ und $\Delta x = A^{-1}\Delta b = \varepsilon v_1$, (2 Punkte). Übergang zu den Normen liefert dann mit $\|v_i\|_2 = 1$ (1 Punkte)

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} = |\varepsilon|, \quad \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} = |\varepsilon|\frac{|\lambda_1|}{|\lambda_n|}.$$

Daraus folgt dann

$$\frac{\|\Delta x\|_2}{\|x\|_2} = |\varepsilon| = \frac{|\lambda_n|}{|\lambda_1|}|\varepsilon|\frac{|\lambda_1|}{|\lambda_n|} = \kappa_2(A)\frac{\|\Delta b\|_2}{\|b\|_2}$$

also Gleichheit, (1 Punkte).

Wir betrachten z.B. die Matrix

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Diese besitzt offenbar nur Null als Eigenwert, (2 Punkte). Damit ist der Spektralradius 0, die Matrix aber nicht die Nullmatrix, (1 Punkte). □

Aufgabe 6. Gegen sei eine allgemeine tridiagonale Matrix

$$T = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & 0 & \ldots & \\ 0 & c_2 & a_3 & b_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & & c_{n-2} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & c_{n-1} & a_n \end{bmatrix}$$

von der die LU-Zerlegung existiert.

1. Schreiben Sie einen Pseudocode, der die LU-Zerlegung von T in $\mathcal{O}(n)$ Operationen berechnet.
2. Ist dieser Algorithmus stabil? Wie kann er stabilisiert werden?

Lösung.

1. Da T tridiagonal ist, muß im k-ten Eliminationsschritt nur ein Element, das Element an Position $(k+1,k)$ auf 0 gebracht werden. Da die k-te Zeile nur bis maximal Spalte $k+1$ Nichtnulleinträge besitzt, wird neben dem auf Null gebrachten Element an Position $(k+1,k)$ nur das Hauptdiagonalelement an Position $(k+1,k+1)$ verändert, d.h. pro Eliminationsschritt wird nur ein Element verändert. Mit den Formeln aus der Vorlesung folgt der Algorithmus, (1 Punkte)

$$(L,U) = LU(T).$$

Input: $T = [t_{ij}]_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tridiagonal mit $t_{ii} = a_i$, $i = 1\ldots,n$
$t_{i,i+1} = b_i$, $t_{i+1,i} = c_i$, $i = 1,\ldots,n$ mit exist. LU-Zerlegung

Output: untere Dreicksmatrix $L = [l_{ij}]_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $l_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ l_i & i=j-1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$,

und obere Dreicksmatrix $U = [u_{ij}]_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $u_{ij} = \begin{cases} d_i & i=j \\ u_i & i=j+1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$,

mit $T = LU$, (1+2 Punkte).

1: $d_1 \leftarrow a_1$, (1 Punkte)

for $i = 1$ to $n-1$ **do**
  $u_i \leftarrow b_i$
  $l_i \leftarrow \frac{c_i}{d_i}$, (1 Punkte)
  $d_{i+1} \leftarrow a_{i+1} - u_i l_i$ (1 Punkte)
end for

(1 Punkte) (Alternativ können auch die Eingabevektoren überschrieben werden)

2. Dieser Algorithmus ist nicht stabil, dazu wäre eine Pivotisierung erforderlich. (1 Punkte)

□

Aufgabe 7. Gegeben sei im $\mathbb{R}^{mn}$ die Norm

$$\|x\| = \max_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} |x_{m(i-1)+k}|$$

1. Man zeige, daß dies eine Norm ist.
2. Man schreibe einen Pseudocode, der diese Norm berechnet.

Lösung.

1. Wir zeigen die 3 Axiome der Norm:
   - Definitheit:
     Es gilt $\|x\| \geq 0$, (1 Punkte). Sei $\|x\| = 0$. Dann ist, da das Maximum über nichtnegative Zahlen genommen wird, $\sum_{i=1}^{n} |x_{m(i-1)+k}| = 0, \quad k = 1, \ldots, m$. Damit folgt, daß die Elemente x_j mit $j = m(i-1)+k$ für $i = 1, \ldots, n$ und $k = 1, \ldots, m$ 0 sind. Daraus folgt aber $x_j = 0$ für $j = 1, \ldots, nm$, (2 Punkte)
   - Linearität:
     Es sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \|\lambda x\| &= \max_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} |\lambda x_{m(i-1)+k}| \\ &= \max_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} |\lambda||x_{m(i-1)+k}| \\ &= \max_{k=1}^{m} |\lambda| \sum_{i=1}^{n} |x_{m(i-1)+k}| \overset{|\lambda| \geq 0}{=} |\lambda| \max_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} |x_{m(i-1)+k}| = |\lambda| \|x\|, \end{aligned}$$

     (2 Punkte)
   - Dreiecksungleichung:
     Es seien $x, y \in \mathbb{R}^{nm}$ mit $x = [x_i]_{i=1}^{nm}$ und $y = [y_i]_{i=1}^{nm}$. Dann folgt mit Dreiecksungleichung und $\max\{|a_i| + |b_i|\} \leq \max\{|a_i|\} + \max\{|b_i|\}$, (1 Punkte)

$$\begin{aligned} \|x + y\| &= \max_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} |x_{m(i-1)+k} + y_{m(i-1)+k}| \\ &\leq \max_{k=1}^{m} \left\{ \sum_{i=1}^{n} |x_{m(i-1)+k}| + \sum_{i=1}^{n} |y_{m(i-1)+k}| \right\} \\ &\leq \max_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} |x_{m(i-1)+k}| + \max_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} |y_{m(i-1)+k}| = \|x\| + \|y\|, \end{aligned}$$

     (2 Punkte).

2.

$$u = maxsum(x)$$

Input: $x = [x_i]_{i=1}^{nm} \in \mathbb{R}^{nm}$
Output: $u \in \mathbb{R}$ mit $u = \|x\| = \max_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} |x_{m(i-1)+k}|$., (1+1 Punkte)

$u \leftarrow 0$ (1 Punkte)
for $k = 1$ to m **do**
    $y_k \leftarrow 0$ (1 Punkte)
    for $i = 1$ to n **do**
        $y_k \leftarrow x_{m(i-1)+k} + y_k$ (1 Punkte)
    end for
    if $|y_k| > u$ **then**
        $u \leftarrow |y_k|$
    end if(2 Punkte)
end for(1 Punkte)

Alternativ kann die Berechnung des Maximums auch in ein Unterprgramm ausgelagert werden.

$\square$