Lösungen:

1.) a) Es sei $a \in \mathbb{N}$, $\omega \in \mathbb{N}$, $B \in \mathbb{N}$ mit $B > 1$.

Dann heißt $$a = \sum_{i=1}^{\omega} z_i B^{\omega-i} \quad \text{mit } z_i \in \{0, \dots, B-1\}$$

B-adische Darstellung || 3 min

b) $x = 21 \Rightarrow x = 2^4 + 2^2 + 2^0 = (10101)_2$ |

$y = 14 \Rightarrow y = 2^3 + 2^2 + 2^1 = (01110)_2$ | 3 min

c) $x + y = (10101)_2 + (01110)_2 = (100011)_2$ |

Da $\omega = 5$ tritt ein Überlauf auf, d.h. $x + y = (00011)_2 = 3$ | 2 min

2+2+2 Pkt.

2.) Es sei $B, t \in \mathbb{N}$, mit $B > 1$.

Eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ heißt Gleitkommazahl zur Basis B mit Mantissenlänge t, falls

$$x = v \cdot m \cdot B^e \quad \text{mit } m = \sum_{i=1}^{t} z_i B^{-i} \;||,\; \text{mit } v \in \{-1, 1\} \;|\;\; z_i \in \{0, \dots, B-1$$

oder $x = 0$. | 4 min

a) $rd(x) = 0.218$ | 1 min

b) $$\begin{aligned} x \tilde{+} y = y \tilde{+} x &= -1.74 \tilde{+} 0.218 \\ &= -0.174 \cdot 10^1 \tilde{+} 0.218 \cdot 10^0 \\ &= -0.174 \cdot 10^1 \tilde{+} 0.0218 \cdot 10^1 \quad | \\ &= 10^1 (-0.174 \tilde{+} 0.0218) \\ &= 10^1 \cdot rd(-0.1522) \quad | \\ &= -0.152 \cdot 10^1 = -1.52 \quad | \end{aligned}$$

4 min

4+1+3 Pkt.

3) absoluter Fehler: $\Delta x = \tilde{x} - x$

relativer Fehler: $\varepsilon_{x,\tilde{x}} = \frac{\tilde{x} - x}{x} = \frac{\Delta x}{x}$

Fehlerfortpflanzung: Wir haben (1. HWS Differentialrechnung)

$$\varphi(x+\Delta x) = \varphi(\tilde{x}) = \varphi'(\xi)(\tilde{x} - x) + \varphi(x) \quad \text{mit } \xi \in [x, \tilde{x}]$$

Damit ist $\varphi(\tilde{x}) - \varphi(x) = \varphi'(\xi)(\tilde{x} - x)$ und für $\tilde{x} \to x$ (damit $\xi \to x$)

$$\varphi(\tilde{x}) - \varphi(x) \approx \varphi'(x)(\tilde{x} - x)$$

$$\Rightarrow \frac{\varphi(\tilde{x}) - \varphi(x)}{\varphi(x)} \approx \varphi'(x) \cdot \frac{\tilde{x} - x}{x} \cdot (\varphi(x))^{-1} \cdot x$$

Mit $\varphi'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ folgt dann $\varepsilon_{\varphi(x),\varphi(\tilde{x})} \approx \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \varepsilon_{x,\tilde{x}} = \frac{x^2}{1+x^2} \varepsilon_{x,\tilde{x}}.$

6 Pkt.

10 min

4) Sortieren bei N Zahlen:

Speicherplatz	mittl. Rechenzeit	Verfahren
3N	$\mathcal{O}(N \log N)$	Mergesort
N	$\mathcal{O}(N \log N)$	Quicksort
N	$\mathcal{O}(N \log N)$	Heapsort
N	$\mathcal{O}(N^2)$	Bubblesort

5 min

a) Mergesort:

7 9 3 2 12 8 4 1

7 9 3 2 | 12 8 4 1

7 9 | 3 2 | 12 8 | 4 1

7 | 9 | 3 | 2 | 12 | 8 | 4 | 1

7 9 | 2 3 | 8 12 | 1 4

2 3 7 9 | 1 4 8 12

1 2 3 4 7 8 9 12

8 min

b) Quicksort: 7 9 3 2 12 8 4 1

3 2 4 1 $\boxed{7}$ 9 12 8

2 1 $\boxed{3}$ 4 $\boxed{7}$ 8 $\boxed{9}$ 12

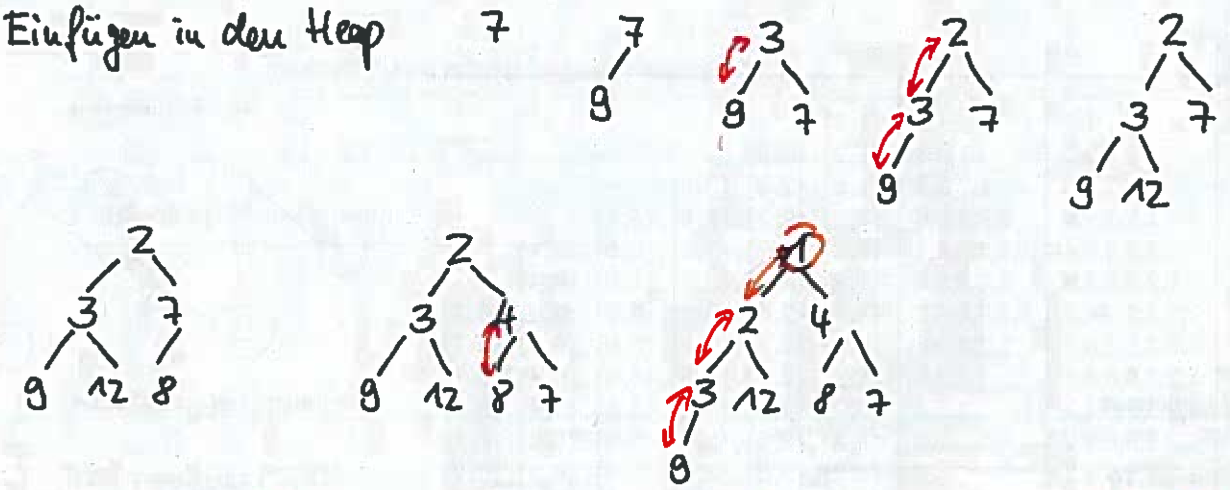
1 $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$ $\boxed{9}$ $\boxed{12}$

1 2 3 4 7 8 9 12

6 min

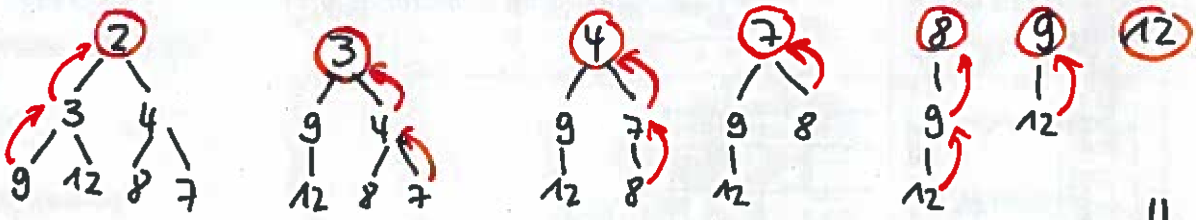
c) Heapsort:

i) Einfügen in den Heap



|||

ii) Entfernen



||

Reihenfolge lautet also: 1 2 3 4 7 8 9 12

10min

d) Bubblesort:

7	9	3	2	12	8	4	1
7	9	3	2	1	8	4	12
7	4	3	2	1	8	9	12
7	4	3	2	1	8	9	12
1	4	3	2	7	8	9	12
1	2	3	4	7	8	9	12
1	2	3	4	7	8	9	12
1	2	3	4	7	8	9	12

4+4+4+5+4Pk

6min

5.) Definition Baum: Es sei $G=(V,E)$ mit $|V|=n$

a) zusammenhängender Wald

b) G hat n-1 Kanten und ist zusammenhängend

c) " " " " " kreisfrei

d) G ist maximal kreisfrei

e) G ist minimal zusammenhängend

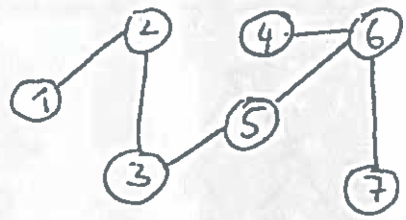
f) Für zwei beliebige $x,y \in V$ mit $x \neq y$ gibt es genau einen x-y-Weg in G

10min

5)

Tiefensuche:

v	w	R	Q	T
		1	1	
1	2	1,2	1,2	{1,2}
2	3	1,2.3	1,2,3	{1,2}, {2,3}
3	5	1,2,3,5	1,2,3,5	{1,2}, {2,3}, {3,5}
5	6	1,2,3,5,6	1,2,3,5,6	{1,2}, {2,3}, {3,5}, {5,6}
6	4	1,2,3,5,6,4	1,2,3,5,6,4	{1,2}, {2,3}, {3,5}, {5,6}, {6,4}
4	-	1,2,3,5,6,4	1,2,3,5,6	{1,2}, {2,3}, {3,5}, {5,6}, {6,4}
6	7	1,2,3,5,6,4,7	1,2,3,5,6,7	{1,2}, {2,3}, {3,5}, {5,6}, {6,4}, {6,7}
7	-	1,2,3,5,6,4,7	1,2,3,5,6	{1,2}, {2,3}, {3,5}, {5,6}, {6,4}, {6,7}
6	-	1,2,3,5,6,4,7	1,2,3,5	{1,2}, {2,3}, {3,5}, {5,6}, {6,4}, {6,7}
5	-	1,2,3,5,6,4,7	1,2,3	{1,2}, {2,3}, {3,5}, {5,6}, {6,4}, {6,7}
3	-	1,2,3,5,6,4,7	1,2	{1,2}, {2,3}, {3,5}, {5,6}, {6,4}, {6,7}
2	-	1,2,3,5,6,4,7	1	{1,2}, {2,3}, {3,5}, {5,6}, {6,4}, {6,7}
1	-	1,2,3,5,6,4,7		{1,2}, {2,3}, {3,5}, {5,6}, {6,4}, {6,7}

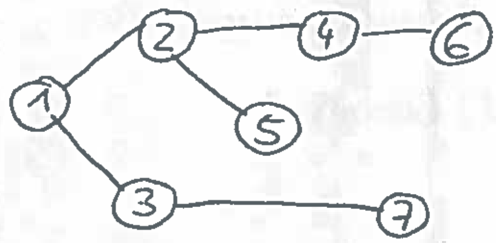


5 Pu.

15 min

Breitensuche:

v	w	R	Q	T
		1	1	
1	2	1,2	1,2	{1,2}
1	3	1,2,3	1,2,3	{1,2}, {1,3}
1	-	1,2,3	2,3	{1,2}, {1,3}
2	4	1,2,3,4	2,3,4	{1,2}, {1,3}, {2,4}
2	5	1,2,3,4,5	2,3,4,5	{1,2}, {1,3}, {2,4}, {2,5}
2	-	1,2,3,4,5	3,4,5	{1,2}, {1,3}, {2,4}, {2,5}
3	7	1,2,3,4,5,7	3,4,5,7	{1,2}, {1,3}, {2,4}, {2,5}, {3,7}
3	-	1,2,3,4,5,7	4,5,7	{1,2}, {1,3}, {2,4}, {2,5}, {3,7}
4	6	1,2,3,4,5,7,6	4,5,7,6	{1,2}, {1,3}, {2,4}, {2,5}, {3,7}, {4,6}
4	-	1,2,3,4,5,7,6	5,7,6	{1,2}, {1,3}, {2,4}, {2,5}, {3,7}, {4,6}
5	-	1,2,3,4,5,7,6	7,6	{1,2}, {1,3}, {2,4}, {2,5}, {3,7}, {4,6}
7	-	1,2,3,4,5,7,6	6	{1,2}, {1,3}, {2,4}, {2,5}, {3,7}, {4,6}
6	-	1,2,3,4,5,7,6		{1,2}, {1,3}, {2,4}, {2,5}, {3,7}, {4,6}



5 Pu.

15 min

6+5+5 Pu.

6.) a)

Iteration	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	x	$\ell(x)$	$p(x)$
0	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	1	0	/
1	/	1	5	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	2	1	1
2	/	/	3	∞	5	9	∞	∞	∞	∞	3	3	2
3	/	/	/	∞	4	9	7	∞	∞	∞	5	4	3
4	/	/	/	∞	/	9	6	∞	∞	∞	7	6	5
5	/	/	/	7	/	9	/	∞	∞	9	4	7	7
6	/	/	/	/	/	8	/	∞	∞	9	6	8	4
7	/	/	/	/	/	/	/	∞	∞	9	10	9	7
8	/	/	/	/	/	/	/	∞	∞	/	8	∞	/
9	/	/	/	/	/	/	/	/	∞	/	9	∞	/
10	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/
Abstand von 1	0	1	3	7	4	8	6	∞	∞	9			

kürzester Weg $1 \to 4$: $1 \to 2 \to 3 \to 5 \to 7 \to 4$

b) Es gilt: $w(e) \geq 0$ $\forall e \in E$ für $G=(V,E)$

c) $\Theta(n^2)$ mit $n=|V|$

15 min
7 Pkt.

7.) a) nein, denn $w((6,2)) = -\infty < 0$

b) Es gilt $w(6 \to 2 \to 3 \to 5 \to 7 \to 6 \to 4) = -1$, d.h. G enthält negative Zyklen

c) Wegen (b) gilt für alle Knoten in der Zusammenhangskomponente von 6: $dist_{(G,w)}(1,v) = -\infty$ $\quad v \in \{2,3,4,5,6,7,10\}$

sowie $dist_{(G,w)}(1,v) = \infty$ $\quad v \in \{8,9\}$.

d) $\Theta(n^3)$ mit $n=|V|$ und $G=(V,E)$.

10 min
5 Pkt

8.) G enthält 2 Zusammenhangskomponenten, eine bestehend aus den Knoten 8 und 9 und eine aus den restlichen Knoten:

- in 8, 9 ist offenbar $8 \overset{3}{\text{———}} 9$ der minimal spannende Baum
- in der anderen Zusammenhangskomponente sortieren wir die Kanten nach Gewicht:

Kante	{1,2}	{3,5}	{4,6}	{4,7}	{2,3}	{5,7}	{7,10}	{2,5}	{3,7}	{1,3}	{4,10}
Gewicht	1	1	1	1	2	2	3	4	4	5	5
in Baum? (j/n)	j	j	j	j	j	j	j	n	n	n	n

Kante	{5,6}	{6,7}	{7,6}
in Baum	n	n	n
Gewicht	6	6	8

12 min
6 Pkt

9.) a) – Netzwerk: Es sei $G=(V,E)$ ein gerichteter Graph, $c: E\to\mathbb{R}^+$ eine Funktion und $s,t\in V$ mit $\delta^-(s)=\delta^+(t)=\emptyset$

Das Tupel (G,c,s,t) heißt Netzwerk

– Fluß: Ein Fluß in einem Netzwerk ist eine Abbildung: $f: E\to\mathbb{R}_0^+$ mit $f(e)\le c(e)$. $\forall e\in E$. Ein Fluß heißt s-t-Fluß, falls

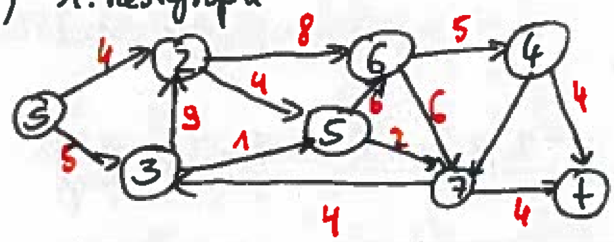
$$\sum_{e\in\delta^+(v)} f(e) = \sum_{e\in\delta^-(v)} f(e) \qquad \forall v\in V,\ v\neq s,\ v\neq t \text{ ist.}$$

– Es sei $A\subset V$ mit $s\in A$, $t\notin A$. Dann heißt $\delta^+(A)$ s-t-Schnitt

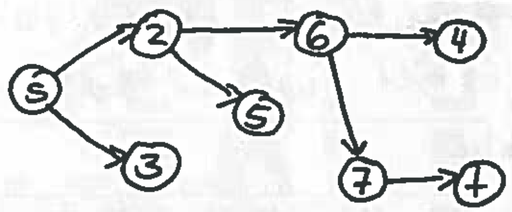
– Ein s-t-Schnitt mit minimaler Kapazität heißt minimaler s-t-Schnitt, wobei $\sum_{e\in\delta^+(A)} c(e)$, die Kapazität eines s-t-Schnittes ist.

b) In einem Netzwerk stimmen maximaler s-t-Fluß und minimaler s-t-Schnitt überein

c) 1. Restgraph

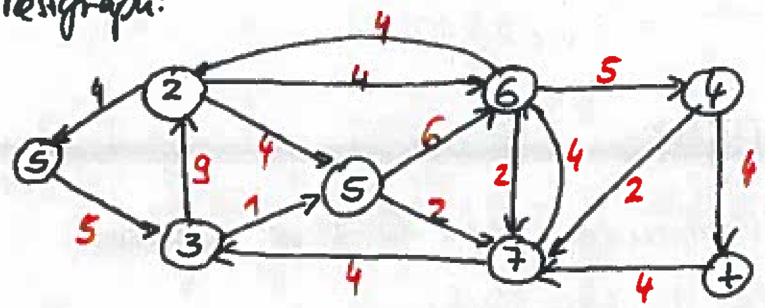


minimal sp. Baum mit Breitensuche

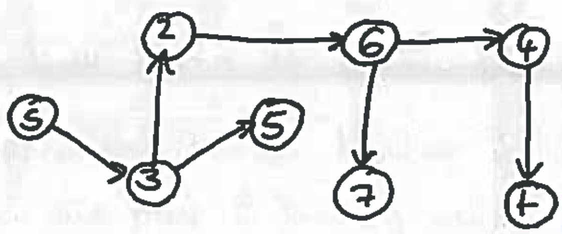


kürzester s-t-Weg also $s\to 2\to 6\to 7\to t$ minimale Kapazität ist 4

2. Restgraph:

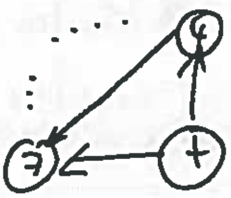


Breitensuche von s:



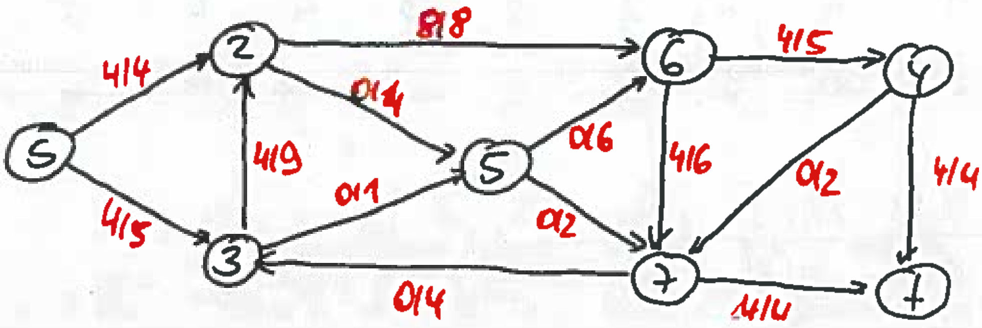
kürzester s-t Weg also $s\to 3\to 2\to 6\to 4\to t$, minimale Kapazität ist 4

3. Restgraph: (Ausschnitt)



, d.h. t ist nicht mehr von 4 oder 7 erreichbar ⇒ fertig.

Fluß:



20min

7+2+6 Punkte

10.) a) Der Grad einer Ecke $v \in V$ ist als $|\delta(v)|$, die Anzahl der benachbarten Kanten definiert. |

b) i) Falls es eine Ecke $v \in V$ mit ungeradem Grad gibt, dann ist wegen $|\delta(v)| = |\delta^+(v)| + |\delta^{\circ-}(v)| = 2k+1$, $(k \in \mathbb{N})$ die Beziehung $|\delta^+(v)| = |\delta^{\circ-}(v)|$ nicht möglich. |

ii) Es haben nun alle Ecken geraden Grad.
Wir zeigen die Aussage mittels Induktion nach $|E| = m$.
Für $m=0$, d.h. alle Ecken sind isolierte Punkte ist nichts zu zeigen. |
Sei nun $m>0$. Dann gibt es ein $v \in V$ mit $|\delta(v)| > 0$.
Sei $\bar{G} = (\bar{V}, \bar{E})$ die Zusammenhangskomponente von $v \in V$.
Da $|\delta(v)|$ gerade ist, folgt damit $|\delta(v)| \geq 2 \quad \forall v \in \bar{V}$.
Lemma **2.1.** impliziert nun $|\bar{V}| \leq |\bar{E}|$. (1) |
Wenn $\bar{G}$ kreisfrei ist, dann wäre $\bar{G}$ ein Baum und damit $|\bar{V}| = |\bar{E}| + 1$ im ↯ zu (1). Es sei nun $C = (\{v_0, \dots, v_{k-1}\}, \{e_1, \dots, e_{k-1}\})$ mit $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$, $i = 1, \dots, k-1$ ein Kreis in $\bar{G}$. $(v_i \neq v_j, i \neq j)$ |
Der Graph $\hat{G} = (V, E \setminus \{e_1, \dots, e_{k-1}\})$ hat weniger Kanten als G und $|\delta(v)|$ ist gerade.
Nach (IV) können wir $\hat{G}$ so orientieren, daß $|\delta^+(v)| = |\delta^-(v)|$ in $\hat{G}$ gilt. Die Kanten e_i orientieren wir nun als (v_{i-1}, v_i).
Damit ist in G ebenfalls $|\delta^+(v)| = |\delta^-(v)|$ erfüllt, wodurch die Behauptung in $G = (V, E(\hat{G}) \cup E(C))$ bewiesen ist. ||

□

7 Punkte, 20 min

11.) a) Ein Kreis $C = (V_1, E_1)$ ist ein Graph mit $V_1 = \{v_1, \dots, v_k\}$ und $E_1 = \{e_1, \dots, e_k\}$ mit $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$, $i = 1, \dots, k-1$
$e_k = \{v_k, v_1\}$. ||

b)
o.B.d.A. sei $V = \{v_1, \dots, v_k\}$ und $E \subset \{\{v_i, v_j\}, i<j\}$.
Jede Kante $e \in E$ wird nun als (v_i, v_j) mit $i<j$ orientiert. (2) ||
Der entstehende gerichtete Graph $\vec{G}$ besitzt dann keinen Kreis mehr, denn falls $C = (v_{i_0} \dots v_{i_k} v_{i_0})$ ein Kreis wäre, dann ist wegen $v_{i_0} = v_{i_0}$ mindestens ein j vorhanden mit $v_{i_j} > v_{i_{j+1}}$. Wegen (2) kann es aber die Kante $(v_{i_j}, v_{i_{j+1}})$ nicht geben $\Rightarrow$ ↯ ||

6 Punkte 12 min

12) a) $G=(V,E)$ heißt bipartit, falls 2 nichtleere Knotenmengen V_1 und V_2 existieren mit $V_1 \cup V_2 = V$
$V_1 \cap V_2 = \emptyset$

Jede Kante $\{x,y\} \in E$ erfüllt $\{x,y\} \cap V_i \neq \emptyset$. ||

Eine Menge nicht benachbarter Kanten nennt man eine Paarung / Matching |

b) Wegen $|\delta(v)| = k \quad \forall v \in V_1 \cup V_2$ ist offenbar $|V_1| = |V_2|$. |

Es sei nun $A \subset V_1$. Von A gehen dann $k|A|$ Kanten nach $\Gamma(A) \subset V_2$.

All diese Kanten gehören zu den $k|\Gamma(A)|$ Kanten die mit $\Gamma(A)$ benachbart sind. Also ist $k|A| \leq k|\Gamma(A)|$, d.h. $|A| \leq |\Gamma(A)|$. |

Damit ist die Heiratsbedingung erfüllt und nach dem Heiratssatz von Hall existiert eine perfekte Paarung ||

7 Punkte
15 min

13) 0
2
4
6
8

3Pkt.
2min

14) 20
18
16
14
12
10
8
6

4Pkt.
3min

15) (0,0)
(0,2)
(1,1)
(1,3)
(2,0)
(2,2)
(3,1)
(3,3)

4Pkt.
4min