Institut für Numerische Simulation
Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

universitätbonn

Übungen zu Einführung in die Grundlagen der Numerik (V2E1)

Wintersemester 2015/16

Prof. Dr. Martin Rumpf — Alexander Effland — Behrend Heeren — Stefan Simon

Anwesenheitsaufgaben Blatt 1

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Lösung $(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$ des folgenden linearen Gleichungssystems mit Hilfe des Gauß- Algorithmus:

$$\begin{aligned} 18x + 12y + 12z &= 120 \\ 12x + 16y + 12z &= 120 \\ 12x + 12y + 15z &= 120\,. \end{aligned}$$

Welche Matrizen $\mathbf{L}, \mathbf{R}$ ergeben sich, so dass $\mathbf{A} = \mathbf{LR}$ gilt?

Aufgabe 2

(i) Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(m,n)}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, welche durch $f(\mathbf{x}) = ||\mathbf{Ax} - \mathbf{b}||^2$ definiert ist. Wie lautet die notwendige Bedingung, die ein Minimierer $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ von f erfüllen muss?
(ii) Es gelte zusätzlich $m = n$ und $\det \mathbf{A} \neq 0$. Zeigen Sie, dass die Funktion $g(\mathbf{x}) := ||\mathbf{Ax}||^2 - 2\mathbf{Ax} \cdot \mathbf{b}$ genau einen Minimierer $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ hat.

Aufgabe 3

Wir betrachten ein elektrisches Netzwerk aus Widerständen. Das Netzwerk wird als Graph mit k Knoten beschrieben. Je zwei Knoten i und j sind durch einen Widerstand R_{ij} verbunden, wobei $R_{ij} = \infty$ für eine fehlende Verbindung zugelassen ist. Sei U_i die am Knoten i anliegende Spannung. Gemäss des Ohmschen Gesetzes berechnet sich der durch den Widerstand $R_{ij} > 0$ fließende Strom zu $(U_j - U_i)/R_{ij}$. Gemäss des ersten Kirchhoffschen Gesetzes ist die Summe aller zu- und abfließenden Ströme in jedem Knoten gleich Null. Wird der am Knoten i durch externe Quellen in das Netzwerk hinein- oder herausfließende Strom mit I_i^{ext} bezeichnet, so gilt also

$$\sum_{j \neq i} (U_i - U_j)/R_{ij} - I_i^{ext} = 0\,.$$

Daraus ergibt sich die sogenannte Admittanzmatrixgleichung

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij} U_j = I_i^{ext}, \quad \text{wobei } a_{ij} = \begin{cases} \frac{-1}{R_{ij}} & \text{, falls} \quad j \neq i, \\ \sum_{l \neq i} \frac{1}{R_{il}} & \text{, falls} \quad j = i. \end{cases}$$

Für sinnvolle Netzwerke beträgt der Rang der Matrix $k-1$.
OBdA kann $U_k = 0$ gesetzt werden, da das Spannungspotential im Netzwerk nur bis auf eine additive Konstante festgelegt ist. Durch Elimination von U_k erhält man ein symmetrisch positiv definites lineares Gleichungssystem.
Stellen Sie dieses Gleichungssystem auf!