



## Übungen zu Einführung in die Grundlagen der Numerik (V2E1) Wintersemester 2015/16

Prof. Dr. Martin Rumpf — Alexander Effland — Behrend Heeren — Stefan Simon

### Anwesenheitsaufgaben Blatt 4

#### Aufgabe 10

(i) Ein geradezu klassisches Beispiel für eine vermeidbare Auslöschung tritt beim Lösen einer quadratischen Gleichung

$$f(x) := x^2 - 2px + q = 0$$

auf. Deren Lösungen bekanntlich durch

$$x_{1,2} = p \pm \sqrt{p^2 - q}$$

gegeben sind, falls  $p^2 - q \geq 0$  ist. In dieser Formel tritt Auslöschung auf, wenn eine Nullstelle in der Nähe von Null liegt. Diese Auslöschung ist jedoch vermeidbar.

Geben Sie mit Hilfe des Wurzelsatzes von Vieta Formeln zur Berechnung von  $x_1, x_2$  an, welche die beiden Lösungen stabil berechnen.

(ii) Gesucht sei die (reelle) Nullstelle des kubischen Polynoms

$$z^3 + 3qz - 2r = 0, \quad r, q > 0.$$

Nach Cardano - Tartaglia ist eine reelle Wurzel gegeben durch

$$z = \left( r + \sqrt{q^3 + r^2} \right)^{\frac{1}{3}} + \left( r - \sqrt{q^3 + r^2} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Diese Formel ist numerisch ungünstig, da zwei Kubikwurzeln berechnet werden müssen und für  $r \rightarrow 0$  Totalauslöschung auftritt.

Geben Sie eine auslöschungsfreie Form für  $z$  an, welche nur die Berechnung einer Kubikwurzel und einer Quadratwurzel erfordert.

**Hinweis:**  $\left( r + \sqrt{q^3 + r^2} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left( r - \sqrt{q^3 + r^2} \right)^{\frac{1}{3}} = ?$

#### Aufgabe 11

Bestimmen Sie mit Hilfe von Givens-Rotationen die QR-Zerlegung der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$