Institut für Numerische Simulation
Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

universitätbonn

Übungen zu Einführung in die Grundlagen der Numerik (V2E1)

Wintersemester 2015/16

Prof. Dr. Martin Rumpf — Alexander Effland — Behrend Heeren — Stefan Simon

Anwesenheitsaufgaben Blatt 5

Aufgabe 12

Wir betrachten die Dirichlet-Energie $\mathbf{E} : H^1(0,1) \to \mathbb{R}$:

$$\mathbf{E}[u] = \frac{1}{2}\int_0^1 u'(x)^2 dx \,.$$

(i) Berechnen Sie die Fréchet-Ableitung

$$\partial_u \mathbf{E}[u](\phi) := \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\mathbf{E}[u+\varepsilon\phi] - \mathbf{E}[u]}{\varepsilon} \,.$$

(ii) Beweisen Sie das Fundamentallemma der Variationsrechnung:
Sei $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $\int_0^1 fg\, dx = 0$ für alle $g \in C^0(0,1)$. Dann gilt $f = 0$.
(iii) Der Gradientenfluss von $\mathbf{E}$ bzgl. des L^2-Skalarprodukts ist für eine zeit- und raumabhängige Funktion $u : [0,\infty) \times (0,1) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\langle \partial_t u, \phi \rangle_{L^2(0,1)}(t) = -\partial_u \mathbf{E}[u](\phi)(t) \quad \forall \phi \in H_0^1(0,1) \quad \forall t > 0 \tag{1}$$

$$u(0,x) = u_0(x)\,. \tag{2}$$

Hierbei ist u_0 ein gegebener Anfangswert, $\langle f, g\rangle_{L^2(0,1)}(t) := \int_0^1 f(t,x)g(t,x)\, dx$ und

$$H_0^1(0,1) = \left\{ \phi \in H^1(0,1) \;:\; \phi(0) = 0 = \phi(1) \right\} .$$

Sei u eine hinreichend glatte Lösung von (1). Zeigen Sie mit Hilfe von (ii) formal, dass u die Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t u = u''$$

erfüllt. Sie können dabei benutzen, dass $H^1(0,1) \subset C^0(0,1)$. **Vorsicht:** Dies gilt nicht in höheren Dimensionen.
(iv) Nun wollen wir ein numerisches Verfahren zur Lösung der Wärmeleitungsgleichung finden. Dazu benutzen wir eine Finite-Elemente-Diskretisierung im Raum und eine Finite-Differenzen-Diskretisierung in der Zeit. Wir lösen also das Problem

$$\left\langle \frac{U_k - U_{k-1}}{\tau}, \Phi \right\rangle_{L^2(0,1)} = -\partial_u \mathbf{E}[U_{k-1}](\Phi) \quad \forall \Phi \in V_h^1(0,1)$$

mit einem Startwert $U_0 \in V_h^1(0,1)$. Dabei ist $V_h^1(0,1)$ der aus der Vorlesung eingeführte Finite-Elemente-Raum und τ die Schrittweite für den Zeitschritt. Geben Sie unter Benutzung von Masse- und Steifigkeits-Matrizen eine rekursive Formel zur Berechnung von U_k an.