Institut für Numerische Simulation
Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

universität bonn

Übungen zu Einführung in die Grundlagen der Numerik (V2E1)

Wintersemester 2015/16

Prof. Dr. Martin Rumpf — Alexander Effland — Behrend Heeren — Stefan Simon

Übungsblatt 10 — Abgabe: 19.01.2016

Aufgabe 29 — 4 Punkte

Zeigen Sie, dass $\rho(M_\omega^{SOR}) \geq |\omega - 1|$.
Hinweis: Betrachten Sie $\det\left(M_\omega^{SOR}\right)$ und zeigen Sie, dass für mindestens einen Eigenwert λ_i von M_ω^{SOR} gilt $|\lambda_i| \geq |1-\omega|$.

Aufgabe 30 — 4 Punkte

Das SSOR-Vefahren ist die symmetrische Variante des SOR-Verfahrens: Nach einem SOR-Schritt wird ein weiterer SOR-Schritt aber bei umgekehrter Indizierung ausgeführt, d.h. die Folge x^k ergibt sich aus dem Iterationsverfahren

$$\begin{aligned}\tilde{x}^{k+1} &= (D-\omega E)^{-1}((1-\omega)D + \omega F)x^k + \omega(D-\omega E)^{-1}b\\ x^{k+1} &= (D-\omega F)^{-1}((1-\omega)D + \omega E)\tilde{x}^{k+1} + \omega(D-\omega F)^{-1}b\,.\end{aligned}$$

Hierbei ist wie beim SOR-Verfahren

$$A = D - E - F\,.$$

Geben Sie das SSOR-Verfahren in der Form

$$x^{k+1} = M_\omega^{SSOR}x^k + N_\omega^{SSOR}b$$

an und zeigen Sie, dass

$$N_\omega^{SSOR} = (2-\omega)\left(\frac{1}{\omega}D - F\right)^{-1}\left(\frac{1}{\omega}D\right)\left(\frac{1}{\omega}D - E\right)^{-1}.$$

Aufgabe 31 — 6 Punkte

Wir wollen folgenden Satz beweisen: Für eine beliebige Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,m}$ gilt

$$\rho(\mathbf{A}) = \lim_{k\to\infty} \left|\left|\left|\mathbf{A}^k\right|\right|\right|^{\frac{1}{k}}.$$

Hierbei bezeichnet $|||\cdot|||$ eine submultiplikative Matrixnorm.
(i) Beweisen Sie $\rho(\mathbf{A}) \leq |||\mathbf{A}|||$.

(ii) Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine Matrixnorm $|||\cdot|||_{\sim}$ mit

$$|||\mathbf{A}|||_{\sim} \leq \rho(\mathbf{A}) + \varepsilon\,.$$

Hinweis: Benutzen Sie die Jordan-Normalform.
(iii) Beweisen Sie obigen Satz unter Verwendung von (i) und (ii)!

Aufgabe 32 **4 Punkte**

Es sei $\mathbf{A}$ eine M-Matrix. Zeigen Sie, dass das SOR-Verfahren mit $\omega < 1$ nicht schneller konvergiert als das Gauss-Seidel Verfahren.
Hinweis: Verwenden Sie die Sätze 5.14 und 5.15!