Institut für Numerische Simulation
Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

universitätbonn

Übungen zu Einführung in die Grundlagen der Numerik (V2E1)

Wintersemester 2015/16

Prof. Dr. Martin Rumpf — Alexander Effland — Behrend Heeren — Stefan Simon

Übungsblatt 10 — Abgabe: 19.01.2016

Aufgabe 29 — 4 Punkte

Zeigen Sie, dass $\rho(M_\omega^{SOR}) \geq |\omega - 1|$.
Hinweis: Betrachten Sie $\det\left(M_\omega^{SOR}\right)$ und zeigen Sie, dass für mindestens einen Eigenwert λ_i von M_ω^{SOR} gilt $|\lambda_i| \geq |1-\omega|$.

Lösung

Die Matrizen $(\mathbb{1} - \omega L)$ und $(\mathbb{1} - \omega U)$ sind Dreiecksmatrizen mit

$$\begin{aligned} \det(\mathbb{1} - \omega L) &= 1\,, \\ \det(\mathbb{1} - \omega U) &= \det((1-\omega)\mathbb{1} + \omega D^{-1}F) = (1-\omega)^n\,. \end{aligned}$$

Daher ist

$$\det(M_\omega^{SOR}) = \det((\mathbb{1} - \omega L)^{-1}(\mathbb{1} - \omega U)) = (1-\omega)^n\,.$$

Andererseits ist

$$\det(M_\omega^{SOR}) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i\,,$$

wobei λ_i die Eigenwerte gezählt mit algebraischer Vielfachheit bezeichnen. Also gilt

$$\prod_{i=1}^{n} |\lambda_i| = |1-\omega|^n$$

und daher muss für einen Faktor $|\lambda_i| \geq |1-\omega|$ gelten.

Aufgabe 30 — 4 Punkte

Das SSOR-Vefahren ist die symmetrische Variante des SOR-Verfahrens: Nach einem SOR-Schritt wird ein weiterer SOR-Schritt aber bei umgekehrter Indizierung ausgeführt, d.h. die Folge x^k ergibt sich aus dem Iterationsverfahren

$$\begin{aligned} \tilde{x}^{k+1} &= (D - \omega E)^{-1}((1-\omega)D + \omega F)x^k + \omega(D-\omega E)^{-1}b \\ x^{k+1} &= (D - \omega F)^{-1}((1-\omega)D + \omega E)\tilde{x}^{k+1} + \omega(D-\omega F)^{-1}b\,. \end{aligned}$$

Hierbei ist wie beim SOR-Verfahren

$$A = D - E - F\,.$$

Geben Sie das SSOR-Verfahren in der Form

$$x^{k+1} = M_\omega^{SSOR} x^k + N_\omega^{SSOR} b$$

an und zeigen Sie, dass

$$N_\omega^{SSOR} = (2-\omega)\left(\frac{1}{\omega}D - F\right)^{-1}\left(\frac{1}{\omega}D\right)\left(\frac{1}{\omega}D - E\right)^{-1}.$$

Lösung

Setzen wir die Iterationsvorschrift für $\tilde{x}^{k+1}$ in die Iterationsvorschrift für x^{k+1} ergibt sich

$$x^{k+1} = M_\omega^{SSOR} x^k + N_\omega^{SSOR} b\,,$$

wobei

$$\begin{aligned} M_\omega^{SSOR} &= (D-\omega F)^{-1}((1-\omega)D + \omega E)(D-\omega E)^{-1}((1-\omega)D + \omega F) \\ N_\omega^{SSOR} &= (2-\omega)\omega\,(D-\omega F)^{-1}\,D\,(D-\omega E)^{-1} \\ &= (2-\omega)\left(\frac{1}{\omega}D - F\right)^{-1}\left(\frac{1}{\omega}D\right)\left(\frac{1}{\omega}D - E\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Also ist N_ω^{SSOR} gegeben wie in der Aufgabenstellung.

Aufgabe 31 **6 Punkte**

Wir wollen folgenden Satz beweisen: Für eine beliebige Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,m}$ gilt

$$\rho(\mathbf{A}) = \lim_{k\to\infty} \left|\left|\left|\mathbf{A}^k\right|\right|\right|^{\frac{1}{k}}.$$

Hierbei bezeichnet $|||\cdot|||$ eine submultiplikative Matrixnorm.
(i) Beweisen Sie $\rho(\mathbf{A}) \le |||\mathbf{A}|||$.
(ii) Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine Matrixnorm $|||\cdot|||_\sim$ mit

$$|||\mathbf{A}|||_\sim \le \rho(\mathbf{A}) + \varepsilon\,.$$

Hinweis: Benutzen Sie die Jordan-Normalform.
(iii) Beweisen Sie obigen Satz unter Verwendung von (i) und (ii)!

Lösung

Zuerst zeigen wir

$$\rho(\mathbf{A}) \le |||\mathbf{A}|||\,. \tag{1}$$

Sei λ ein Eigenwert von $\mathbf{A}$ mit Eigenvektor $\mathbf{x}$. Aus $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$ folgt $\mathbf{AX} = \lambda\mathbf{X}$ mit $\mathbf{X} = [\mathbf{x}, \dots, \mathbf{x}] \in \mathbb{R}^{m,m}$. Es gilt

$$|\lambda| \, |||\mathbf{X}||| = |||\lambda\mathbf{X}||| = |||\mathbf{AX}||| \leq |||\mathbf{A}||| \, |||\mathbf{X}|||$$

wegen der Submultiplikativität der Matrixnorm, also $|\lambda| \leq |||\mathbf{A}|||$. Weil λ beliebig war, können wir insbesondere das Maximum betrachten, woraus (1) folgt.
Als nächstes zeigen wir, dass für jedes $\varepsilon > 0$ eine Matrixnorm $|||\cdot|||_\sim$ existiert mit

$$|||\mathbf{A}|||_\sim \leq \rho(\mathbf{A}) + \varepsilon \,. \tag{2}$$

Eine Jordan-Zerlegung ergibt

$$\mathbf{A} = \mathbf{S} \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_{n_2}(\lambda_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{n_k}(\lambda_k) \end{pmatrix} \mathbf{S}^{-1}$$

mit $\mathbf{S} \in Gl(m)$, λ_i ($1 \leq i \leq k$) Eigenwerte und $n_1 + \dots n_k = m$. Setze

$$\mathbf{H}(\alpha) = \begin{pmatrix} H_{n_1}(\alpha) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_{n_2}(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_{n_k}(\alpha) \end{pmatrix}$$

mit $H_l(\alpha) = \operatorname{diag}(\alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^l)$, dann folgt

$$\mathbf{H}(\varepsilon^{-1})\mathbf{S}^{-1}\mathbf{ASH}(\varepsilon) = \begin{pmatrix} G_{n_1}(\lambda_1, \varepsilon) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_{n_2}(\lambda_2, \varepsilon) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{n_k}(\lambda_k, \varepsilon) \end{pmatrix} .$$

Hierbei ist $G_{n_l}(\lambda_l, \varepsilon) = (g_{i,j})$ mit $g_{i,i} = \lambda_l$, $g_{i,i+1} = \varepsilon$ und $g_{i,j} = 0$ sonst. Mit der Wahl

$$|||\mathbf{A}|||_\sim = \left\| \mathbf{H}(\varepsilon^{-1})\mathbf{S}^{-1}\mathbf{ASH}(\varepsilon) \right\|_1$$

folgt (2).
Aus (1) folgt wegen $\rho(\mathbf{A})^k = \rho(\mathbf{A}^k) \leq \left|\left|\left|\mathbf{A}^k\right|\right|\right|$ sofort $\rho(\mathbf{A}) \leq \lim_{k\to\infty} \left|\left|\left|\mathbf{A}^k\right|\right|\right|^{\frac{1}{k}}$. Es bleibt also zu zeigen, dass für jedes $\varepsilon > 0$ ein $l \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$\left|\left|\left|\mathbf{A}^k\right|\right|\right|^{\frac{1}{k}} \leq \rho(\mathbf{A}) + \varepsilon$$

für alle $k > l$. Wegen (2) folgt $|||\mathbf{A}|||_\sim \leq \rho(\mathbf{A}) + \varepsilon$. Wegen der Äquivalenz von Normen auf endlich-dimensionalen Vektorräumen existiert ein $C \in \mathbb{R}^+$ mit $|||\mathbf{B}||| \leq C\,|||\mathbf{B}|||_\sim$ für alle $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m,m}$. Also gilt für alle $k > l$

$$\left|\left|\left|\mathbf{A}^k\right|\right|\right| \leq C \left|\left|\left|\mathbf{A}^k\right|\right|\right|_\sim \leq C\,|||\mathbf{A}|||_\sim^k \leq C\,(\rho(\mathbf{A}) + \varepsilon)^k \,,$$

woraus der Beweis folgt wegen $C^{\frac{1}{k}} \to 1$ für $k \to \infty$.

Aufgabe 32 **4 Punkte**

Es sei $\mathbf{A}$ eine M-Matrix. Zeigen Sie, dass das SOR-Verfahren mit $\omega < 1$ nicht schneller konvergiert als das Gauss-Seidel Verfahren.
Hinweis: Verwenden Sie die Sätze 5.14 und 5.15!

Lösung

Es gilt $\mathbf{W}^G = \mathbf{D} - \mathbf{E}$ und $\mathbf{W}^{SOR} = \frac{1}{\omega}\mathbf{D} - \mathbf{E}$. Weil $\mathbf{A}$ eine M-Matrix ist, folgt aus $\mathbf{A} \leq \mathbf{W}^G \leq \mathbf{W}^{SOR}$ sofort

$$0 \leq \mathbf{A}^{-1} \underbrace{\left(\mathbf{W}^G - \mathbf{A}\right)}_{=:\mathbf{R}^G} \leq \mathbf{A}^{-1} \underbrace{\left(\mathbf{W}^{SOR} - \mathbf{A}\right)}_{=:\mathbf{R}^{SOR}} .$$

Wegen Aufgabe 31 gilt $\rho(\mathbf{A}) = \lim_{k\to\infty} \left|\left|\left|\mathbf{A}^k\right|\right|\right|^{\frac{1}{k}}$, also

$$\rho(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{R}^G) = \lim_{k\to\infty} \left|\left|\left|(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{R}^G)^k\right|\right|\right|^{\frac{1}{k}} \leq \lim_{k\to\infty} \left|\left|\left|(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{R}^{SOR})^k\right|\right|\right|^{\frac{1}{k}} = \rho(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{R}^{SOR}) .$$

Aus den Sätzen 5.14 und 5.15 folgt nun die Behauptung.