Institut für Numerische Simulation
Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

universitätbonn

Übungen zu Einführung in die Grundlagen der Numerik (V2E1)

Wintersemester 2015/16

Prof. Dr. Martin Rumpf — Alexander Effland — Behrend Heeren — Stefan Simon

Übungsblatt 11 — Abgabe: 26.01.2016

Aufgabe 33 — 4 Punkte

Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Lösung dieses Gleichungssystems mit dem CG-Verfahren zu $x_0 = (1,0)^T$.

Aufgabe 34 — 6 Punkte

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine positiv definite und symmetrische Matrix mit $m \leq n$ verschiedenen Eigenwerten. Zeigen Sie, dass das CG-Verfahren die Lösung in höchstens m Schritten berechnet.
Hinweis: Betrachten Sie das Polynom

$$\frac{(-1)^m}{\lambda_1 \cdots \lambda_m}(x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_m)\,.$$

Aufgabe 35 — 6 Punkte

Wir untersuchen den Aufwand des CG-Verfahrens für das Poisson-Problem auf dem n-dimensionalen Würfel $[0,1]^n \subset \mathbb{R}^n$. Sei dazu $\mathbf{A}_h \in \mathbb{R}^{N^n,N^n}$ die zugehörige finite Differenzen Matrix. Sie können verwenden (vgl. Sie hierzu Aufgabe 23), dass die Eigenwerte von $\mathbf{A}_h$ gegeben sind durch

$$\lambda_\alpha := \frac{4}{h^2}\sum_{i=1}^{n} \sin^2\left(\frac{\alpha_i \pi h}{2}\right),$$

wobei $h = \frac{1}{N+1}$ und $\alpha \in \{1, \ldots, N\}^n$.
i) Zeigen Sie, dass $\theta^* = \frac{h^2}{2n}$.
ii) Zeigen Sie, dass $\rho(M_{\theta^*}) = 1 - Ch^2 + O(h^3)$.
iii) Wie viele Schritte sind nötig, um eine gegebene Fehlertoleranz $\varepsilon > 0$ zu erreichen, d.h. ab welchem k gilt $\rho(M_{\theta^*})^k \leq \varepsilon$?

iv) Geben Sie den Gesamtaufwand des CG-Verfahrens an, um eine gegebene Fehlertoleranz $\varepsilon > 0$ zu erreichen. Benutzen Sie hierzu, dass für $\mathbf{A}_h$ die maximale Anzahl der von 0 verschiedenen Einträge pro Zeile gegeben ist durch $M = 1 + 2n$.

Aufgabe 36 **6 Punkte**

Sei $F \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ eine strikt konvexe Funktion mit $F(x) \to \infty$ für $\|x\| \to \infty$.
i) Zeigen Sie, dass es zu $p \neq 0$ ein eindeutig bestimmtes $\lambda^*(p, x)$ gibt mit

$$F(x + \lambda^* p) = \min_{\lambda \in \mathbb{R}} F(x + \lambda p) \,.$$

ii) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\lambda(x) := \min_{\lambda \in \mathbb{R}} F(x - \lambda \nabla F(x))$$

auf der Menge $M = \{x \in \mathbb{R}^n \;:\; \nabla F(x) \neq 0\}$ differenzierbar ist. **Tipp:** Betrachten Sie die Optimalitätsbedingung in λ und verwenden Sie den Satz über implizite Funktionen.
iii) Leiten Sie aus dem CG-Verfahren (unter der Annahme, dass λ^* berechenbar ist) ein Verfahren her, so dass die konstruierte Folge x^k gegen x^* mit $F(x^*) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} F(x)$ konvergiert.