



## Übungen zu Einführung in die Grundlagen der Numerik (V2E1) Wintersemester 2015/16

Prof. Dr. Martin Rumpf — Alexander Effland — Behrend Heeren — Stefan Simon

### Übungsblatt 12

Abgabe: 02.02.2016

#### Aufgabe 37

4 Punkte

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  eine symmetrische, positiv definite Bandmatrix mit Bandweite  $2m + 1$ . Zeigen Sie, dass die bei der Cholesky-Zerlegung entstehende Matrix  $L$  auch eine Bandstruktur besitzt. Welche Bandbreite hat  $L$ ?

#### Aufgabe 38

4 Punkte

Zeigen Sie, dass die Tschebyscheff-Polynome  $T_i$  bzgl. der Gewichtsfunktion  $w(x) = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$  orthogonal auf  $[-1, 1]$  sind, also

$$\langle T_i, T_j \rangle := \int_{-1}^1 T_i(x) T_j(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ \pi, & i = j = 0, \\ \frac{\pi}{2}, & i = j \neq 0. \end{cases}$$

#### Aufgabe 39

4 Punkte

i) Zeigen Sie, dass sich für  $x \geq 1$  die Tschebyscheff-Polynome  $t_k$  darstellen lassen als

$$t_k(x) = \cosh(k \operatorname{Arcosh}(x)).$$

ii) Sei  $x_k$  die größte Nullstelle von  $t_k$ . Zeigen Sie, dass

$$x_k = 1 - \frac{\pi^2}{8k^2} + O(k^{-4})$$

für  $n \rightarrow \infty$ .

#### Aufgabe 40

4 Punkte

Beweisen Sie Lemma 5.27 über die Betrachtung der Eigenwerte einer Matrix  $A$  mit

$$\begin{pmatrix} t_{k+1}(x) \\ t_k(x) \end{pmatrix} = A(x) \begin{pmatrix} t_k(x) \\ t_{k-1}(x) \end{pmatrix}.$$