Institut für Numerische Simulation
Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

universitätbonn

Übungen zu Einführung in die Grundlagen der Numerik (V2E1)

Wintersemester 2015/16

Prof. Dr. Martin Rumpf — Alexander Effland — Behrend Heeren — Stefan Simon

Übungsblatt 12 — Abgabe: 02.02.2016

Aufgabe 37 — 4 Punkte

Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine symmetrische, positiv definite Bandmatrix mit Bandweite $2m + 1$. Zeigen Sie, dass die bei der Cholesky-Zerlegung entstehende Matrix L auch eine Bandstruktur besitzt. Welche Bandbreite hat L?

Lösung

Es bezeichne $A_i \in \mathbb{R}^{i,i}$ die führende Untermatrix von A; diese ist symmetrisch und positiv definit. Also folgt für $2 \leq i \leq n$

$$A_i = \begin{pmatrix} A_{i-1} & c \\ c^T & a_{ii} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{i-1} & 0 \\ b^T & l_{ii} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{i-1}^T & b \\ 0 & l_{ii} \end{pmatrix}$$

mit $b, c \in \mathbb{R}^{i-1}$, so dass $A_{i-1} = L_{i-1}L_{i-1}^T$, $c = L_{i-1}b$ und $a_{ii} = b^T b - l_{ii}^2$. Aus dieser Darstellung folgt nun induktiv die Behauptung, denn $b = L_{i-1}^{-1}c$ für eine untere linke Dreicksmatrix L_{i-1}^{-1} und $b_l \neq 0$ höchstens für die letzten m Einträge.

Aufgabe 38 — 4 Punkte

Zeigen Sie, dass die Tschebyscheff-Polynome T_i bzgl. der Gewichtsfunktion $w(x) = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ orthogonal auf $[-1, 1]$ sind, also

$$\langle T_i, T_j \rangle := \int_{-1}^{1} T_i(x) T_j(x) \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ \pi, & i = j = 0, \\ \frac{\pi}{2}, & i = j \neq 0. \end{cases}$$

Lösung

Es ist $T_i(x) = \cos(i \arccos(x))$. Daher folgt sofort mit der Substitution $x = \cos(t)$

$$\langle T_i, T_j \rangle = \int_{0}^{\pi} \cos(it) \cos(jt) dt = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(it) \cos(jt) dt \,.$$

Mittels einmaliger partieller Integration zeigt man, dass die Menge

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin(ix)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(ix)}{\sqrt{\pi}} \,:\, 1 \leq i \leq n \right\}$$

eine Orthonormalbasis vom Grad n bzgl. $L^2((-\pi, \pi))$ bildet, woraus die Behauptung folgt.

Aufgabe 39 **4 Punkte**

i) Zeigen Sie, dass sich für $x \geq 1$ die Tschebyscheff-Polynome t_k darstellen lassen als

$$t_k(x) = \cosh(k \operatorname{Arcosh}(x)) .$$

ii) Sei x_k die größte Nullstelle von t_k. Zeigen Sie, dass

$$x_k = 1 - \frac{\pi^2}{8k^2} + O(k^{-4})$$

für $n \to \infty$.

Lösung

i) Die angegebene Formel stimmt offensichtlich für $k = 0$ und $k = 1$. Zu zeigen ist also nur noch, dass auch die Rekursionsformel $t_{k+1}(x) = 2xt_k(x) - t_{k-1}(x)$ gilt. Dazu benutzen wir

$$\cosh(x+y) = 2\cosh(\frac{x+y}{2}x)\cosh(\frac{x-y}{2}x) .$$

ii) Nach Vorlesung sind die Nullstellen von t_k gegeben durch

$$\cos\left(\frac{2j+1}{2k}\pi\right) \qquad j = 0, 1, \ldots, k-1 \tag{1}$$

Also liegt die größte Nullstelle bei

$$x_k = \cos(\frac{\pi}{2k}) .$$

Taylorentwicklung von cos lieftert die Aussage.

Aufgabe 40 **4 Punkte**

Beweisen Sie Lemma 5.27 über die Betrachtung der Eigenwerte einer Matrix A mit

$$\begin{pmatrix} t_{k+1}(x) \\ t_k(x) \end{pmatrix} = A(x) \begin{pmatrix} t_k(x) \\ t_{k-1}(x) \end{pmatrix} .$$

Lösung

Die Matrix ist gegeben durch

$$A(x) = \begin{pmatrix} 2x & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und hat die Eigenwerte

$$\lambda_1 = x - \sqrt{x^2 - 1}$$
$$\lambda_2 = x + \sqrt{x^2 - 1}$$

Diagonalisieren von A liefert $A = SDS^{-1}$ mit

$$S = \begin{pmatrix} x - \sqrt{x^2 - 1} & x + \sqrt{x^2 - 1} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$D = \begin{pmatrix} x - \sqrt{x^2 - 1} & 0 \\ 0 & x + \sqrt{x^2 - 1} \end{pmatrix}$$
$$S^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}} & \frac{1}{2}(\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} + 1) \\ \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}} & \frac{1}{2} - \frac{x}{2\sqrt{x^2-1}} \end{pmatrix}$$

Nun kann t_k rekursiv berechnet werden durch

$$\begin{pmatrix} t_{k+1}(x) \\ t_k(x) \end{pmatrix} = A(x)^k \begin{pmatrix} t_1(x) \\ t_0(x) \end{pmatrix} = A(x)^k \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= SD^kS^{-1} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)^k \\ \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^k \end{pmatrix}$$