Institut für Numerische Simulation
Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

universitätbonn

Übungen zu Einführung in die Grundlagen der Numerik (V2E1)

Wintersemester 2015/16

Prof. Dr. Martin Rumpf — Alexander Effland — Behrend Heeren — Stefan Simon

Übungsblatt 1 — Abgabe: 03.11.2015

Aufgabe 1 — 4 Punkte

Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 4x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & = & 3 \\ 3x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & -4 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 6\,. \end{array}$$

Lösung

Es ist $x = (1, -2, 3, -4)^T$.

Aufgabe 2 — 4 Punkte

(i) Bestimmen Sie die Anzahl der Multiplikationen für die Cramersche Regel und den Gauß-Algorithmus beim Lösen von 3×3-Gleichungssystemen.
(ii) Bestimmen Sie das grundsätzliche Verhalten der Anzahl der nötigen Multiplikationen zum Lösen von $n \times n$-Gleichungssystemen beider Verfahren.
Hinweis: Sie dürfen beim Gauß-Algorithmus davon ausgehen, dass während des Verfahrens keine Nulleinträge auftreten.

Lösung

(i) Laut der Regel von Sarrus benötigt man $6 \cdot 2 = 12$ Multiplikationen für die Berechnung einer Determinante. Zum Lösen eines LGS mit der Cramerschen Regel werden also $4 \cdot 12 = 48$ Multiplikationen und 3 Divisionen benötigt. Für den Gauß-Algorithmus siehe Abschnitt (ii).
(ii) Aus der Leibniz-Formel für die Determinante ergibt sich, dass $n! \cdot (n-1)$ Multiplikationen zur Berechnung einer Determinante benötigt werden. Weil $(n+1)$ Determinanten berechnet werden müssen, ergibt sich als Gesamtaufwand $n! \cdot (n-1) \cdot (n+1)$. Die Komplexität zur Lösung von $A \cdot x = b$, $A = (a_{i,j})$, mittels des Gauß-Algorithmus ist wie folgt: Im i. Schritt muss das $\frac{a_{k,i}}{a_{i,i}}$-fache der i. Zeile von der k. Zeile von (A, b) subtrahiert werden, $k = i+1, \ldots, n$. Es werden also $(n-i) \cdot (n-i+1)$ Multiplikationen und $(n-i)$ Divisionen in diesem Schritt ausgeführt. Aufsummieren ergibt:

$$\sum_{i=1}^{n} (n-i) \cdot (n-i+1) + (n-i) = \frac{1}{6} \left(2n^3 + 3n^2 - 5n \right) .$$

Nach dem Aufstellen der Dreiecksstruktur ist der Aufwand für das Einsetzen im i. Schritt der folgende: $(i-1)$ Multiplikation und 1 Division, also insgesamt $\frac{1}{2} \cdot (n-1) \cdot n$ Multiplikationen und n Divisionen.

Aufgabe 3 **4 Punkte**

Für eine Funktion $f(x), x \in [a,b]$, ist das Interpolationspolynom p_k vom Grad k, das Polynom k-ten Grades, für das gilt:

$$f(x_i) = p_k(x_i) \text{ für } i \in \{0, ..., k\} \wedge x_i = a + \frac{i(b-a)}{k}.$$

(i) Bestimmen Sie das lineare Gleichungssystem zur Berechnung von p_k.
(ii) Interpolieren Sie die Funktion $f(x) = x^4$, $x \in [0,1]$, durch ein Polynom zweiten Grades. Skizzieren Sie f und die Interpolierende.

Lösung

i) Das Interpolationspolynom vom Grad k hat die Gestalt

$$p_k(x) = \sum_{j=0}^{k} \lambda_j x^j$$

mit zu bestimmenden Koeffizienten $\lambda_j \in \mathbb{R}$, $j \in \{0, ..., k\}$. Damit werden die Interpolationsbedingungen $f(x_i) = p(x_i)$ zu linearen Gleichungen

$$f(x_i) = p(x_i) = \sum_{j=0}^{k} \lambda_j \left(a + \frac{i(b-a)}{k}\right)^j$$

ii) Das Gleichungssystem für die Koeffizienten von p_2 ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{16} \\ 1 \end{pmatrix}$$

und besitzt die eindeutige Lösung $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) = (0, -\frac{3}{4}, \frac{7}{4})$. Also ist das gesuchte Interpolationspolynom zweiten Grades gegeben durch

$$p_2(x) = \frac{7}{4}x^2 - \frac{3}{4}x$$

Aufgabe 4 **4 Punkte**

Beweisen Sie, dass die bei der LR-Zerlegung regulärer Matrizen entstehenden Mengen von Matrizen $\{L\}, \{R\}$ Untergruppen von $GL(n)$ sind. Zeigen Sie, dass die LR-Zerlegung eindeutig ist, falls sie existiert.

Lösung

Da $GL(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \; : \; rank(A) = n\}$, gilt für eine Matrix $A \in GL(n)$ mit LR-Zerlegung $A = LR$:

$$n = rank(A) = rank(LR) \leq \min(rank(L), rank(R)) \leq n$$

also muss auch $rank(L) = n = rank(R)$ gelten und damit $L, R \in GL(n)$. Damit sind $\{L\}$ und $\{R\}$ Teilmengen von $GL(n)$. Um zu zeigen, dass $\{L\}$ eine Untergruppe von $GL(n)$ ist, weisen wir die beiden Untergruppenkriterien nach:
1) $L, \tilde{L} \in \{L\} \Rightarrow L\tilde{L} \in \{L\}$
Die Menge $\{L\}$ ist gegeben durch

$$\{L\} = \{L = (l_{ij}) \in GL(n) \; : \; l_{ij} = 0 \; \forall j > i \,, l_{ii} = 1 \; \forall i\}$$

Für $k > i$ ist

$$(L\tilde{L})_{ik} = \sum_{j=1}^{n} l_{ij}\tilde{l}_{jk} = \sum_{j=1}^{i} l_{ij}\tilde{l}_{jk} + \sum_{j=i+1}^{n} l_{ij}\tilde{l}_{jk}$$

Für die Summe von 1 bis i gilt $\tilde{l}_{jk} = 0$, da $j \leq i < k$, für die Summe von $i+1$ bis n gilt $l_{ij} = 0$, da $j > i$. Also ist $(L\tilde{L})_{ik} = 0$ für $k > i$. Weiterhin gilt

$$(L\tilde{L})_{ii} = \sum_{j=1}^{n} l_{ij}\tilde{l}_{ji} = \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}\tilde{l}_{ji} + l_{ii}\tilde{l}_{ii} + \sum_{j=i+1}^{n} l_{ij}\tilde{l}_{ji} = 1$$

und damit $L\tilde{L} \in \{L\}$.
2) $L \in \{L\} \Rightarrow L^{-1} \in \{L\}$
Wir haben zu zeigen, dass $\tilde{l}_{jk} := (L^{-1})_{jk} = 0$ für alle $k > j$. Dazu benutzen wir, dass $l_{ii} \neq 0$ für alle i, da $det(L) = l_{11} \cdot \ldots \cdot l_{nn} \neq 0$. Wir gehen jetzt Zeile für Zeile vor. Zunächst gilt für $k > 1$

$$0 = (Id)_{1k} = \sum_{j=1}^{n} l_{1j}\tilde{l}_{jk} = l_{11}\tilde{l}_{1k} \,,$$

also folgt $\tilde{l}_{1k} = 0$ für $k > 1$. Weiterhin gilt für $k > 2$

$$0 = (Id)_{2k} = \sum_{j=1}^{n} l_{2j}\tilde{l}_{jk} = l_{21}\tilde{l}_{1k} + l_{22}\tilde{l}_{2k} = l_{22}\tilde{l}_{2k} \,,$$

also folgt $\tilde{l}_{2k} = 0$ für $k > 2$. Somit zeigt man weiterhin rekursiv, dass $\tilde{l}_{jk} = 0$ für $k > j$. Weiterhin ist zu zeigen, dass $\tilde{l}_{ii} = 1$. Dazu benutzen wir die Gleichung

$$1 = (Id)_{ii} = \sum_{j=1}^{n} l_{ij}\tilde{l}_{ji} = l_{ii}\tilde{l}_{ii} \,.$$

Also gilt $\tilde{l}_{ii} = 1$ und damit $L^{-1} \in \{L\}$.
Für $\{R\}$ sind die beiden Untergruppenkriterien analog nachzuweisen.
Eindeutigkeit der LR-Zerlegung:
Angenommen, man hat zwei Zerlegungen

$$LR = A = \tilde{L}\tilde{R} \,.$$

Dann gilt

$$\tilde{L}^{-1}L = R\tilde{R}^{-1}\,.$$

Also gilt

$$\tilde{L}^{-1}L = Id = R\tilde{R}^{-1}\,,$$

da $\{L\} \cap \{R\} = \{Id\}$. Somit ist $L = \tilde{L}$ und $R = \tilde{R}$.