Institut für Numerische Simulation
Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

universitätbonn

Übungen zu Einführung in die Grundlagen der Numerik (V2E1)

Wintersemester 2015/16

Prof. Dr. Martin Rumpf — Alexander Effland — Behrend Heeren — Stefan Simon

Übungsblatt 2 — Abgabe: 10.11.2015

Aufgabe 5 — 4 Punkte

(i) Zeigen Sie: Ist $\mathbf{A}$ eine reguläre Matrix der Bandbreite m, so haben die Matrizen $\mathbf{L}$ und $\mathbf{R}$ ebenfalls die Bandbreite m (Permutationen dürfen vernachlässigt werden).
Zur Erinnerung: Eine Matrix $\mathbf{A} = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n,n}$ heißt Bandmatrix mit Bandbreite $m \in \mathbb{N}$, falls $a_{i,j} = 0$ für alle $|i-j| > m$.
(ii) Bestimmen Sie die Anzahl der nötigen Multiplikationen in $\mathcal{O}$-Notation, welche der Gauß-Algorithmus für eine Tridiagonalmatrix benötigt.

Aufgabe 6 — 4 Punkte

Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem $Cx = b$, wobei

$$C = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$$

mit $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulär und $x, b \in \mathbb{R}^{2n}$. Insbesondere ist C regulär.
(i) Beweisen Sie: für $E = (A - BA^{-1}B)^{-1}$ und $F = (B - AB^{-1}A)^{-1}$ gilt

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & E \end{pmatrix} .$$

(ii) Betrachten Sie für $b = (b_1, b_2)^T$ die Lösungen y_1 und y_2 der Gleichungssysteme

$$(A+B)y_1 = b_1 + b_2$$
$$(A-B)y_2 = b_1 - b_2 \,.$$

Zeigen Sie, dass dann die Lösung $x = (x_1, x_2)^T$ des Gleichungssystems $Cx = b$ gegeben ist durch $x_1 = \frac{(y_1+y_2)}{2}$ und $x_2 = \frac{(y_1-y_2)}{2}$.

Aufgabe 7 — 4 Punkte

Eine Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1\ldots n}$ heißt strikt diagonaldominant, falls $\sum_{j\neq i} |a_{ij}| < |a_{ii}|$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt. Beweisen Sie, dass der Gauß-Algorithmus ohne Zeilenvertauschung funktioniert, falls A^T strikt diagonaldominant ist.

Programmierübungen Teil 1 **Abgabe bis zum 20.11.2015**

Programmieraufgabe 1

(a) Implementieren Sie den Gauß-Algorithmus mit Zeilenpivotsuche zur Lösung eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$. Speichern Sie die Matrizen L und R in der Matrix A. Benutzen Sie ggf. das C++ Template auf der Homepage.

(b) Testen Sie das Programm durch Berechnung der Interpolationspolynome 2., 4., 6. und 8. Grades der Funktion $f(x) = \sin(x)$, $x \in [0, 2\pi]$, i.e. das zu lösende lineare Gleichungssystem lautet:

$$\left(\frac{2\pi i}{n}\right)^n c_n + \left(\frac{2\pi i}{n}\right)^{n-1} c_{n-1} + \ldots + \left(\frac{2\pi i}{n}\right)^0 c_0 = \sin\left(\frac{2\pi i}{n}\right),\ 0 \le i \le n.$$

Zeichnen Sie f und die Interpolierende, ggf. unter Verwendung der Plotroutine auf der Homepage.

Programmieraufgabe 2

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x) \quad , \quad \text{für } x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) &= 0 \quad , \end{aligned}$$

Für ein $n \in \mathbb{N}$ setze $h = (n-1)^{-1}$ und definiere die äquidistante Diskretisierung $x_i = (i-1)\,h$, $1 \le i \le n$. Man erhält dadurch das lineare Gleichungssystem $\mathbf{AU} = \mathbf{B}$, mit $\mathbf{U} = \left(U^2, \ldots, U^{n-1}\right)^T$, $\mathbf{B} = \left(f(x_2), \ldots, f(x_{n-1})\right)^T$ und

$$\mathbf{A} = h^{-2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n-2,n-2}.$$

Betrachten Sie $f_1(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$ und $f_2(x) = 1,\ x \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$, und $f_2(x) = 0$ sonst.

(a) Lösen Sie für f_1 und f_2 das LGS $\mathbf{AU} = \mathbf{B}$ mit dem Gauß-Algorithmus aus Aufgabe 1 und zeichnen Sie die Lösung und die rechte Seite f. Verwenden Sie $n = 250, 500, 1000, 2000$ und betrachten Sie die Laufzeit.

(b) Schreiben Sie einen neuen Algorithmus zur Gauß-Elimation, der die dünnbesetzte Bandstruktur der Matrix $\mathbf{A}$ berücksichtigt. Speichern Sie dazu nur die Einträge von $\mathbf{A}$, die von 0 verschieden sind (z.B. in drei Vektoren für die Haupt- und Nebendiagonalen)! Lösen Sie das LGS $\mathbf{AU} = \mathbf{B}$ mit diesem Algorithmus für $n = 250, 500, 1000, 2000$ und betrachten Sie die Laufzeit.

(c) Modifizieren Sie Ihr Programm, so dass allgemeine Randwerte $u(0) = a$ und $u(1) = b$ berücksichtigt werden können. Zeichnen Sie die Lösung für $a = 1$ und $b = 2$. Hinweis: Für die affin-lineare Funktion $g(x) = (b-a)\,x + a$ gilt $g'' = 0$.