Institut für Numerische Simulation
Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

universität bonn

Übungen zu Einführung in die Grundlagen der Numerik (V2E1)

Wintersemester 2015/16

Prof. Dr. Martin Rumpf — Alexander Effland — Behrend Heeren — Stefan Simon

Übungsblatt 2 — Abgabe: 10.11.2015

Aufgabe 5 — 4 Punkte

(i) Zeigen Sie: Ist $\mathbf{A}$ eine reguläre Matrix der Bandbreite m, so haben die Matrizen $\mathbf{L}$ und $\mathbf{R}$ ebenfalls die Bandbreite m (Permutationen dürfen vernachlässigt werden).
Zur Erinnerung: Eine Matrix $\mathbf{A} = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n,n}$ heißt Bandmatrix mit Bandbreite $m \in \mathbb{N}$, falls $a_{i,j} = 0$ für alle $|i-j| > m$.
(ii) Bestimmen Sie die Anzahl der nötigen Multiplikationen in $\mathcal{O}$-Notation, welche der Gauß-Algorithmus für eine Tridiagonalmatrix benötigt.

Lösung

(i) Dies kann man durch direktes Ausrechnen zeigen. Alternativ kann man die Aussage aus dem folgenden Algorithmus zur Berechnung der LR-Zerlegung ableiten:

for $k \leftarrow 1$ **to** n **do**
  $l_{k,k} = 1;$
  for $j \leftarrow k$ **to** n **do**
    $r_{k,j} = a_{k,j} - \sum_{\alpha=1}^{k-1} l_{k,\alpha} r_{\alpha,j};$
    /* berechne k. Zeile von $\mathbf{R}$ */
  end
  for $i \leftarrow k+1$ **to** n **do**
    $l_{i,k} = \frac{1}{r_{k,k}} \left(a_{i,k} - \sum_{\alpha=1}^{k-1} l_{i,\alpha} r_{\alpha,k} \right);$
    /* berechne k. Spalte von $\mathbf{L}$ */
  end
end

Die Richtigkeit dieses Algorithmus ergibt sich aus folgender Überlegung:

$$a_{i,j} = \sum_{\alpha=1}^{i-1} l_{i,\alpha} r_{\alpha,j} + r_{i,j} \qquad \text{für } j \geq i\,,$$

$$a_{i,j} = \sum_{\alpha=1}^{j-1} l_{i,\alpha} r_{\alpha,j} + l_{i,j} r_{j,j} \qquad \text{für } j < i\,.$$

Es gilt stets $r_{k,k} \neq 0$, da $\mathbf{R}$ vollen Rand besitzt und keine Permutationen notwendig sind.

Für $k = 1$ folgt aus $a_{i,j} = 0$ für alle $|i - j| > m$ sofort, dass die erste Zeile von $\mathbf{R}$ eine Bandstruktur wegen $r_{1,j} = a_{1,j}$ für alle j besitzt, gleiches gilt wegen $l_{i,1} = \frac{a_{i,1}}{r_{1,1}}$ für die erste Spalte von $\mathbf{L}$.
Für $k > 1$ schließe man mittels Induktion: Aus

$$r_{k,j} = a_{k,j} - \sum_{\alpha=1}^{k-1} l_{k,\alpha} r_{\alpha,j} \quad k \leq j \leq n$$

folgt, dass die k. Zeile von $\mathbf{R}$ Bandbreite m hat, weil höchstens m' $(0 \leq m' \leq m)$ der $a_{k,j}$ $(k \leq j \leq n)$ und $m - m'$ der $l_{k,\alpha}$ $(1 \leq \alpha \leq k-1)$ von 0 verschieden sind (siehe Iterationsvorschrift), ähnliches gilt für $\mathbf{L}$.
(ii) Der Gesamtaufwand beträgt $\mathcal{O}(n)$ Multiplikationen.

Aufgabe 6 **4 Punkte**

Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem $Cx = b$, wobei

$$C = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$$

mit $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulär und $x, b \in \mathbb{R}^{2n}$. Insbesondere ist C regulär.
(i) Beweisen Sie: für $E = (A - BA^{-1}B)^{-1}$ und $F = (B - AB^{-1}A)^{-1}$ gilt

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & E \end{pmatrix}.$$

(ii) Betrachten Sie für $b = (b_1, b_2)^T$ die Lösungen y_1 und y_2 der Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} (A + B)y_1 &= b_1 + b_2 \\ (A - B)y_2 &= b_1 - b_2\,. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass dann die Lösung $x = (x_1, x_2)^T$ des Gleichungssystems $Cx = b$ gegeben ist durch $x_1 = \frac{(y_1+y_2)}{2}$ und $x_2 = \frac{(y_1-y_2)}{2}$.

Lösung

i) Die Gleichung $CC^{-1} = Id$ zu überprüfen liefert die beiden Gleichungen:
1) $A(A - BA^{-1}B)^{-1} + B(B - AB^{-1}A)^{-1} = Id$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow B(B - AB^{-1}A)^{-1}(A - BA^{-1}B) = -BA^{-1}B \\ &\Leftrightarrow (B - AB^{-1}A)^{-1}(AB^{-1} - BA^{-1}) = -A^{-1} \\ &\Leftrightarrow AB^{-1} - BA^{-1} = -(B - AB^{-1}A)A^{-1} = AB^{-1} - BA^{-1} \end{aligned}$$

2) $B(A - BA^{-1}B)^{-1} + A(B - AB^{-1}A)^{-1} = 0$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (B - AB^{-1}A)^{-1}A^{-1}B = -A + BA^{-1}B \\ &\Leftrightarrow BA^{-1}B - A = -A + BA^{-1}B \end{aligned}$$

ii) Einsetzen ergibt

$$Cx = \begin{pmatrix} A\frac{y_1+y_2}{2} + B\frac{y_1-y_2}{2} \\ B\frac{y_1+y_2}{2} + A\frac{y_1-y_2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b_1+b_2}{2} + \frac{b_1-b_2}{2} \\ \frac{b_1+b_2}{2} - \frac{b_1-b_2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7 **4 Punkte**

Eine Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1...n}$ heißt strikt diagonaldominant, falls $\sum_{j\neq i} |a_{ij}| < |a_{ii}|$ für alle $i \in \{1, ..., n\}$ gilt. Beweisen Sie, dass der Gauß-Algorithmus ohne Zeilenvertauschung funktioniert, falls A^T strikt diagonaldominant ist.

Lösung

Wir zeigen mit vollständiger Induktion, dass die im k-ten Schritt des Gauß-Algorithmus resultierende Matrix $A^{(k)} = \left(a_{i,j}^{(k)}\right)_{i,j=1,\ldots,n}$ die Eigenschaft besitzt, dass die transponierte der Untermatrix $\left(a_{i,j}^{(k)}\right)_{i,j=k,\ldots,n}$ wieder strikt diagonaldominant ist. Dadurch ist dann insbesondere $a_{kk}^{(k)} \neq 0$ und der Gauß-Algorithmus weiterhin anwendbar. Wir haben also unter der Annahme, dass $\left(A^{(k)}\right)^T$ strikt diagonaldominant ist, zu zeigen, dass die transponierte der Matrix mit den Einträgen

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} a_{kj}^{(k)}$$

wieder strikt diagonaldominant ist. Dazu schätzen wir ab:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=k+1, j\neq i}^{n} |a_{ji}^{(k+1)}| \leq \sum_{j=k+1, j\neq i}^{n} |a_{ji}^{(k)}| + \frac{|a_{ki}^{(k)}|}{|a_{kk}^{(k)}|} \sum_{j=k+1, j\neq i}^{n} |a_{jk}^{(k)}| \\
&= \sum_{j=k, j\neq i}^{n} |a_{ji}^{(k)}| - |a_{ki}^{(k)}| + \frac{|a_{ki}^{(k)}|}{|a_{kk}^{(k)}|} \left(\sum_{j=k+1}^{n} |a_{jk}^{(k)}| - |a_{ik}^{(k)}| \right) \\
&< |a_{ii}^{(k)}| - \frac{|a_{ki}^{(k)}|}{|a_{kk}^{(k)}|} |a_{ik}^{(k)}| \leq |a_{ii}^{(k+1)}|
\end{aligned}$$

Programmierübungen Teil 1 **Abgabe bis zum 20.11.2015**

Programmieraufgabe 1

(a) Implementieren Sie den Gauß-Algorithmus mit Zeilenpivotsuche zur Lösung eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$. Speichern Sie die Matrizen L und R in der Matrix A. Benutzen Sie ggf. das C++ Template auf der Homepage.

(b) Testen Sie das Programm durch Berechnung der Interpolationspolynome 2., 4., 6. und 8. Grades der Funktion $f(x) = \sin(x)$, $x \in [0, 2\pi]$, i.e. das zu lösende lineare Gleichungssystem lautet:

$$\left(\frac{2\pi i}{n}\right)^n c_n + \left(\frac{2\pi i}{n}\right)^{n-1} c_{n-1} + ... + \left(\frac{2\pi i}{n}\right)^0 c_0 = \sin\left(\frac{2\pi i}{n}\right),\ 0 \le i \le n.$$

Zeichnen Sie f und die Interpolierende, ggf. unter Verwendung der Plotroutine auf der Homepage.

Programmieraufgabe 2

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\begin{array}{rcll} -u''(x) & = & f(x) & , \quad \text{für } x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) & = & 0 & , \end{array}$$

Für ein $n \in \mathbb{N}$ setze $h = (n-1)^{-1}$ und definiere die äquidistante Diskretisierung $x_i = (i-1)\,h,\ 1 \le i \le n$. Man erhält dadurch das lineare Gleichungssystem $\mathbf{AU} = \mathbf{B}$, mit $\mathbf{U} = \left(U^2, ..., U^{n-1}\right)^T$, $\mathbf{B} = (f(x_2), ..., f(x_{n-1}))^T$ und

$$\mathbf{A} = h^{-2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n-2,n-2}.$$

Betrachten Sie $f_1(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$ und $f_2(x) = 1,\ x \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$, und $f_2(x) = 0$ sonst.

(a) Lösen Sie für f_1 und f_2 das LGS $\mathbf{AU} = \mathbf{B}$ mit dem Gauß-Algorithmus aus Aufgabe 1 und zeichnen Sie die Lösung und die rechte Seite f. Verwenden Sie $n = 250, 500, 1000, 2000$ und betrachten Sie die Laufzeit.

(b) Schreiben Sie einen neuen Algorithmus zur Gauß-Elimation, der die dünnbesetzte Bandstruktur der Matrix $\mathbf{A}$ berücksichtigt. Speichern Sie dazu nur die Einträge von $\mathbf{A}$, die von 0 verschieden sind (z.B. in drei Vektoren für die Haupt- und Nebendiagonalen)! Lösen Sie das LGS $\mathbf{AU} = \mathbf{B}$ mit diesem Algorithmus für $n = 250, 500, 1000, 2000$ und betrachten Sie die Laufzeit.

(c) Modifizieren Sie Ihr Programm, so dass allgemeine Randwerte $u(0) = a$ und $u(1) = b$ berücksichtigt werden können. Zeichnen Sie die Lösung für $a = 1$ und $b = 2$. Hinweis: Für die affin-lineare Funktion $g(x) = (b-a)\,x + a$ gilt $g'' = 0$.