Institut für Numerische Simulation
Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

universität bonn

Übungen zu Einführung in die Grundlagen der Numerik (V2E1)

Wintersemester 2015/16

Prof. Dr. Martin Rumpf — Alexander Effland — Behrend Heeren — Stefan Simon

Übungsblatt 3 — Abgabe: 17.11.2015

Aufgabe 8 — 4 Punkte

Bestimmen Sie für $a = 1$ die Nullstellen des Polynoms

$$p_a(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + a.$$

Wie ändern sich diese Nullstellen für $a = 1 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$? Auf wie viele Stellen genau kann die Lösung an einem Rechner mit relativer Maschinengenauigkeit $\varepsilon = 10^{-16}$ berechnet werden?

Aufgabe 9 — 4 Punkte

Sei $|||\cdot|||$ eine submultiplikative Norm auf $\mathbb{R}^{n\times n}$ mit $|||\mathbb{1}||| = 1$.
(i) Falls $|||\mathbf{B}||| < 1$, dann ist $(\mathbb{1} - \mathbf{B})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{B}^k$ und es gilt die Ungleichung

$$\left|\left|\left|(\mathbb{1} - \mathbf{B})^{-1}\right|\right|\right| \leq \frac{1}{1 - |||\mathbf{B}|||}\,.$$

(ii) Sei $\mathbf{A} \in GL(n)$ und $\mathbf{A}_\delta = \mathbf{A} + \mathbf{C}$ eine Störung von $\mathbf{A}$.
Zeigen Sie: Falls $|||\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}||| \leq \varepsilon < 1$ ist, so gilt

$$\kappa(\mathbf{A}_\delta) \leq \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\kappa(\mathbf{A})\,.$$

Aufgabe 10 — 6 Punkte

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine Matrix mit den Spalten $\mathbf{A}_j$, $j = 1, \ldots, n$. Wir definieren eine Matrixnorm durch

$$|||\mathbf{A}||| := \max_{j=1,\ldots,n} \left\|\mathbf{A}_j\right\|_2\,.$$

Zeigen Sie:
(i) Durch $|||\cdot|||$ wird eine Norm auf $\mathbb{R}^{m\times n}$ definiert.
(ii) $\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2 \leq |||\mathbf{A}|||\,\|\mathbf{x}\|_1$ und $\left\|\mathbf{A}^T\mathbf{y}\right\|_\infty \leq |||\mathbf{A}|||\,\|\mathbf{y}\|_2$ für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$.
(iii) $\|\mathbf{A}\|_F \leq \sqrt{n}\,|||\mathbf{A}|||$ und $|||\mathbf{A}\mathbf{B}||| \leq \|\mathbf{A}\|_F\,|||\mathbf{B}|||$ für eine Matrix $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n,k}$. Hierbei bezeichnet $\|\cdot\|_F$ die Frobenius-Norm.

Aufgabe 11 **4 Punkte**

Zeigen Sie, dass sich bei der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & & & 1 \\ -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

bei der Spaltenpivotsuche für den Betrag des maximalen Pivotelements 2^{n-1} ergibt.