Institut für Numerische Simulation
Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

universitätbonn

Übungen zu Einführung in die Grundlagen der Numerik (V2E1)

Wintersemester 2015/16

Prof. Dr. Martin Rumpf — Alexander Effland — Behrend Heeren — Stefan Simon

Übungsblatt 3 — Abgabe: 17.11.2015

Aufgabe 8 — 4 Punkte

Bestimmen Sie für $a = 1$ die Nullstellen des Polynoms

$$p_a(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + a.$$

Wie ändern sich diese Nullstellen für $a = 1 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$? Auf wie viele Stellen genau kann die Lösung an einem Rechner mit relativer Maschinengenauigkeit $\varepsilon = 10^{-16}$ berechnet werden?

Lösung

Für $a = 1$ gilt

$$p_1(x) = (x-1)^4\,,$$

also ist $x = 1$ die einzige Nullstelle. Für $a = 1 - \varepsilon$ ist

$$p_a(x) = (x-1)^4 - \varepsilon\,,$$

daher sind die Nullstellen von $p_a(x)$ gegeben durch

$$z_{1,2} = 1 \pm \sqrt[4]{\varepsilon} \quad \text{und} \quad z_{3,4} = 1 \pm \mathrm{i}\sqrt[4]{\varepsilon}\,.$$

Die Lösung kann auf 4 Stellen genau berechnet werden, da

$$|1 - z_i| = \sqrt[4]{\varepsilon}\,.$$

Aufgabe 9 — 4 Punkte

Sei $|||\cdot|||$ eine submultiplikative Norm auf $\mathbb{R}^{n\times n}$ mit $|||\mathbb{1}||| = 1$.
(i) Falls $|||\mathbf{B}||| < 1$, dann ist $(\mathbb{1} - \mathbf{B})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{B}^k$ und es gilt die Ungleichung

$$\left|\left|\left|(\mathbb{1} - \mathbf{B})^{-1}\right|\right|\right| \leq \frac{1}{1 - |||\mathbf{B}|||}\,.$$

(ii) Sei $\mathbf{A} \in GL(n)$ und $\mathbf{A}_\delta = \mathbf{A} + \mathbf{C}$ eine Störung von $\mathbf{A}$.

Zeigen Sie: Falls $|||\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}||| \leq \varepsilon < 1$ ist, so gilt

$$\kappa(\mathbf{A}_\delta) \leq \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\kappa(\mathbf{A}).$$

Lösung

(i) Es gilt

$$(\mathbb{1} - \mathbf{B}) \left(\sum_{j=0}^{k} \mathbf{B}^j \right) - \mathbb{1} = -\mathbf{B}^{k+1}.$$

Wegen der Submultiplikativität dieser Norm folgt $|||\mathbf{B}^{k+1}||| \leq |||\mathbf{B}|||^{k+1} \to 0$ für $k \to \infty$, also ist $(\mathbb{1} - \mathbf{B})$ invertierbar mit $(\mathbb{1} - \mathbf{B})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{B}^k$. Weiterhin gilt

$$\left|\left|\left|(\mathbb{1} - \mathbf{B})^{-1}\right|\right|\right| = \left|\left|\left|\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{B}^k\right|\right|\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left|\left|\left|\mathbf{B}^k\right|\right|\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |||\mathbf{B}|||^k \leq \frac{1}{1 - |||\mathbf{B}|||}.$$

(ii) Es folgt

$$\begin{aligned} \kappa(\mathbf{A}_\delta) &= \left|\left|\left|\mathbf{A}(\mathbb{1} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C})\right|\right|\right| \left|\left|\left|(\mathbb{1} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C})^{-1}\mathbf{A}^{-1}\right|\right|\right| \\ &\leq |||\mathbf{A}||| \left|\left|\left|\mathbf{A}^{-1}\right|\right|\right| \left|\left|\left|(\mathbb{1} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C})^{-1}\right|\right|\right| \left|\left|\left|\mathbb{1} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}\right|\right|\right|. \end{aligned}$$

Weiterhin ist $|||\mathbb{1} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}||| \leq |||\mathbb{1}||| + |||\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}||| \leq 1 + \varepsilon$ und wegen (i)

$$\left|\left|\left|(\mathbb{1} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C})^{-1}\right|\right|\right| \leq \frac{1}{1 - |||\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}|||} \leq \frac{1}{1-\varepsilon}.$$

Aufgabe 10 **6 Punkte**

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine Matrix mit den Spalten $\mathbf{A}_j$, $j = 1, \ldots, n$. Wir definieren eine Matrixnorm durch

$$|||\mathbf{A}||| := \max_{j=1,\ldots,n} \left\|\mathbf{A}_j\right\|_2.$$

Zeigen Sie:
(i) Durch $|||\cdot|||$ wird eine Norm auf $\mathbb{R}^{m\times n}$ definiert.
(ii) $\|\mathbf{Ax}\|_2 \leq |||\mathbf{A}||| \, \|\mathbf{x}\|_1$ und $\left\|\mathbf{A}^T\mathbf{y}\right\|_\infty \leq |||\mathbf{A}||| \, \|\mathbf{y}\|_2$ für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$.
(iii) $\|\mathbf{A}\|_F \leq \sqrt{n}\, |||\mathbf{A}|||$ und $|||\mathbf{AB}||| \leq \|\mathbf{A}\|_F \, |||\mathbf{B}|||$ für eine Matrix $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n,k}$. Hierbei bezeichnet $\|\cdot\|_F$ die Frobenius-Norm.

Lösung

(i) Definitheit und Homogenität folgen sofort, die Dreiecksungleichung folgt für $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ aus $(1 \leq j \leq n)$

$$\left\|\mathbf{A}_j + \mathbf{B}_j\right\|_2 \leq \left\|\mathbf{A}_j\right\|_2 + \left\|\mathbf{B}_j\right\|_2 \leq \max_r \|\mathbf{A}_r\|_2 + \max_s \|\mathbf{B}_s\|_2.$$

(ii) Es ist

$$\|\mathbf{Ax}\|_2 \leq \|\mathbf{A}\|_2 \|\mathbf{x}\|_2 \leq |||\mathbf{A}||| \, \|\mathbf{x}\|_1 \; .$$

Die Ungleichung $\|\mathbf{A}\|_2 \leq |||\mathbf{A}|||$ ergibt sich beispielsweise wie folgt:
Eine Singulärwertzerlegung ergibt $\mathbf{A} = \mathbf{UDV^T}$ mit $\mathbf{U} \in O(m)$, $\mathbf{V} \in O(n)$ und $\mathbf{D} = \operatorname{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_k, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{m,n}$ ($k \leq \min(m,n)$). Für die Diagonalmatrix $\mathbf{D}$ folgt die Ungleichung $\|\mathbf{A}\|_2 \leq |||\mathbf{A}|||$ sofort, der allgemeine Fall folgt aus

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \max_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \sqrt{\mathbf{x}^T\mathbf{A}^T\mathbf{Ax}} = \max_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \sqrt{\mathbf{x}^T\mathbf{VD}^T\mathbf{DV}^T\mathbf{x}} = \max_{\|\mathbf{y}\|_2=1} \sqrt{\mathbf{y}^T\mathbf{D}^T\mathbf{Dy}} \, .$$

Die zweite Ungleichung ergibt sich aus

$$\left\|\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{y}\right\|_\infty \leq \max_j \left\|\mathbf{A}_j^T \cdot \mathbf{y}\right\|_2 \leq |||\mathbf{A}||| \, \|\mathbf{y}\|_2 \; .$$

(iii) Es gilt

$$\|\mathbf{A}\|_F = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \max_j \left(n \sum_{i=1}^m a_{i,j}^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{n} \, |||\mathbf{A}|||$$

und

$$|||\mathbf{AB}||| = \max_j \left\|\mathbf{AB}_j\right\|_2 \leq \max_j \|\mathbf{A}\|_F \left\|\mathbf{B}_j\right\|_2 = \|\mathbf{A}\|_F \, |||\mathbf{B}||| \; .$$

Aufgabe 11 **4 Punkte**

Zeigen Sie, dass sich bei der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & & & 1 \\ -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

bei der Spaltenpivotsuche für den Betrag des maximalen Pivotelements 2^{n-1} ergibt.
Lösung

Wir zeigen die Aussage induktiv und betrachten dazu allgemeiner die Matrix

$$\mathbf{A}^{(n)} = \begin{bmatrix} 1 & & & c \\ -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & c \end{bmatrix}$$

für ein $c \in \mathbb{R}$ und behaupten, dass die resultierende R-Matrix gegeben ist durch

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & c \\ & \ddots & & & 2c \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & 2^{n-2}c \\ & & & & 2^{n-1}c \end{bmatrix}.$$

Für $n = 2$ ist dies leicht zu überprüfen. Im Induktionsschritt erhalten wir im ersten Schritt des Gauß-Algorithmus, angewandt auf die Matrix $\mathbf{A}^{(n)}$, die Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & c \\ & 1 & & & 2c \\ & -1 & \ddots & & \vdots \\ & \vdots & \ddots & 1 & 2c \\ & -1 & \dots & -1 & 2c \end{bmatrix}.$$

Auf diese kann nun die Induktionsannahme für $n - 1$ angewandt werden, s.d. die resultierende Matrix gegeben ist durch

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & c \\ & \ddots & & & 2c \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & 2^{n-2}c \\ & & & & 2^{n-1}c \end{bmatrix}.$$

Daher ist das maximale Pivotelement 2^{n-1}.