



Übungen zu Einführung in die Grundlagen der Numerik (V2E1) Wintersemester 2015/16

Prof. Dr. Martin Rumpf — Alexander Efland — Behrend Heeren — Stefan Simon

Übungsblatt 5

Abgabe: 1.12.2015

Aufgabe 16

6 Punkte

Seien $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Betrachte für $\alpha > 0$ und $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ folgendes Funktional:

$$T_\alpha(\mathbf{x}) = \|\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2 + \alpha \|\mathbf{x}\|_2^2.$$

Zeigen Sie:

- Für jedes $\alpha > 0$ existiert ein eindeutiges $\mathbf{x}_\alpha \in \mathbb{R}^n$, so dass $T_\alpha(\mathbf{x}_\alpha) \leq T_\alpha(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.
- \mathbf{x}_α erfüllt $(\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \alpha \mathbb{1}) \mathbf{x}_\alpha = \mathbf{A}^T \mathbf{b}$.
- Aus $\text{Rang}(\mathbf{A}) = n = \min(n, m)$ folgt $\mathbf{x}_\alpha \rightarrow \mathbf{A}^+ \mathbf{b}$ für $\alpha \searrow 0$. Für die Definition von \mathbf{A}^+ siehe Aufgabe 14.

Aufgabe 17

4 Punkte

(i) Zu $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ existieren die QR-Zerlegungen $\mathbf{A} = \mathbf{Q}_1 \mathbf{R}_1 = \mathbf{Q}_2 \mathbf{R}_2$. Zeigen Sie, dass eine orthogonale Matrix $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{m,m}$ existiert mit

$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{Q}_2 \mathbf{S}^T, \quad \mathbf{R}_1 = \mathbf{S} \mathbf{R}_2.$$

(ii) Zeigen Sie, dass die QR-Zerlegung für reguläre Matrizen eindeutig ist, sofern $r_{i,i} > 0$ ist.

Aufgabe 18

4 Punkte

(i) Sei $u_0(x) = a \sin(kx)$ mit $k \in \mathbb{R}$ und $v(x) = b \sin(kx)$. Zeigen Sie, dass

$$u(t, x) := a \cos(kct) \sin(kx) + \frac{b}{kc} \sin(kct) \sin(kx)$$

eine Lösung des Problems der Membranschwingung $\partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u = 0$ in $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ mit $u(0, x) = u_0(x)$ und $\partial_t u(0, x) = v(x)$ ist.

(ii) Wie müssen Sie k wählen, damit zusätzlich die Randbedingungen $u(t, 0) = 0 = u(t, \pi)$ erfüllt sind?

(iii) Welche Lösung ergibt sich für

$$u_0(x) = \sum_{m=1}^M a_m \sin(mx) \quad \text{und} \quad v(x) = \sum_{m=1}^M b_m \sin(mx)$$

sowie den Randbedingungen $u(t, 0) = 0 = u(t, \pi)$?

Programmierübungen Teil 2

Abgabe bis zum 18.12.2015

Programmieraufgabe 3

Implementieren Sie die QR-Zerlegung mit Householder-Transformationen zur Lösung eines linearen Gleichungssystems $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, wobei $n \leq m$. Benutzen Sie ggf. das C++ Template auf der Homepage.

Testen Sie das Programm mit dem quadratischen Gleichungssystem aus Programmieraufgabe 1 oder 2 von Blatt 2, und der 5×3 - Matrix aus Aufgabe 15.

Programmieraufgabe 4

Die Sägeblattfunktion $z : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$z(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < \pi/2 \\ \pi - t, & \pi/2 \leq t < 3\pi/2 \\ t - 2\pi, & 3\pi/2 \leq t \leq 2\pi \end{cases} .$$

Für $m \in \mathbb{N}$ sei $(t_i)_{0 \leq i \leq m}$ eine äquidistante Diskretisierung von $[0, 2\pi]$, d.h. $t_i = i/m$.

(a) Betrachten Sie für $n \in \mathbb{N}$ die punktsymmetrische, abgeschnittene Fourierreihe

$$z^n[x_1, \dots, x_n](t) = \sum_{k=1}^n x_k \sin(kt)$$

und lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem

$$\min_{x_1, \dots, x_n} \sum_{i=1}^m \left| z(t_i) - z^n[x_1, \dots, x_n](t_i) \right|^2 = \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \|\mathbf{b} - \mathbf{Ax}\|_2^2 \quad (1)$$

mit geeigneter Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$, rechter Seite $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ und QR-Zerlegung $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$. Verwenden Sie z.B. $m = 100$ und $n = 2, 5, 10, 20$ und visualisieren Sie das Ergebnis.

Hinweis: Für die QR-Zerlegung $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ mit $\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{1}$ und $\mathbf{Q}^T \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{pmatrix}$ gilt

$$\|\mathbf{b} - \mathbf{Ax}\|_2^2 = \|\mathbf{Q}^T(\mathbf{b} - \mathbf{Ax})\|_2^2 = \left\| \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 - \mathbf{Rx} \\ \mathbf{b}_2 \end{pmatrix} \right\|_2^2 = \|\mathbf{b}_1 - \mathbf{Rx}\|_2^2 + \|\mathbf{b}_2\|_2^2 .$$

(b) Auf der Homepage finden Sie den Datensatz $(t_i, z_i)_{0 \leq i \leq 1000}$ welcher ein verrauschtes Signal darstellt (siehe Abbildung). Lösen Sie das Ausgleichsproblem (1) mit der rechten Seite $b_i = z_i$ für $n = 2, 5, 10, 20$ und visualisieren Sie das Ergebnis.

