# Übungen zu Einführung in die Grundlagen der Numerik (V2E1)

Wintersemester 2015/16

Prof. Dr. Martin Rumpf — Alexander Effland — Behrend Heeren — Stefan Simon

## Übungsblatt 6 — Abgabe: 8.12.2015

### Aufgabe 19 — 6 Punkte

Bestimmen Sie eine schwache Lösung $u \in H^1(0,1)$ der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\begin{aligned} &-(a(x)u'(x))' = 0 \quad \forall x \in (0,1) \\ &u(0) = 0,\ u(1) = 1\,, \end{aligned}$$

wobei die Koeffizientenfunktion $a$ gegeben ist durch

$$\begin{aligned} a(x) &= 1 \quad \text{falls } x \in (0, \tfrac{1}{3}) \\ a(x) &= \tfrac{1}{2} \quad \text{falls } x \in (\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}) \\ a(x) &= 2 \quad \text{falls } x \in (\tfrac{2}{3}, 1)\,. \end{aligned}$$

**Hinweis:** Betrachten Sie $v(x) = u(x) - x$, um das Problem in $H_0^1$ zu formulieren.

### Aufgabe 20 — 6 Punkte

(i) Sei $T \subset \mathbb{R}^2$ ein Dreieck. Zeigen Sie für eine Funktion $q \in C^0(\overline{T}, \mathbb{R}^2) \cap C^1(T, \mathbb{R}^2)$:

$$\int_T \mathrm{div} q(x) dx = \int_{\partial T} q(x) \cdot n(x) d\mathcal{H}^{n-1}(x)\,.$$

Hierbei bezeichnet $n$ den äußeren Einheitsnormalenvektor und $\mathcal{H}^{n-1}$ das $(n-1)$-dimensionale Hausdorff-Maß.
**Hinweis:** Zerschneiden Sie $T$ derart, dass die Schnittgerade eine Parallele zur x-Achse ist und einen Eckpunkt enthält (falls keine Seite von $T$ parallel zur x-Achse liegt). Beweisen Sie den Satz separat für jedes der beiden entstehenden Dreiecke.

(ii) Zeigen Sie die obige Aussage für polygonal berandete konvexe Flächen.
**Hinweis:** Verwenden Sie (i).

**Aufgabe 21** **6 Punkte**

Auf dem Intervall $[0,1]$ betrachten wir eine Zerlegung in Intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ mit $x_i = \frac{i}{N}$, $i = 0, \ldots, N$. Für $h = \frac{1}{N}$ definieren wir den Finite-Elemente-Raum

$$V_h^2([0,1]) = \left\{ v \in C^0([0,1], \mathbb{R}) \ : \ v\big|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathcal{P}_2([x_i, x_{i+1}]) \ \forall i = 0, \ldots, N-1 \right\} .$$

Hierbei ist $\mathcal{P}_2([x_i, x_{i+1}])$ die Menge aller quadratischen Polynome auf $[x_i, x_{i+1}]$.

(i) Geben Sie eine Basis $(b_k)_{k=0,\ldots,2N}$ von $V_h^2([0,1])$ an. Verwenden Sie dazu stückweise quadratische Funktionen $(\phi_i)_{i=0,\ldots,N}$ und $(\phi_{i+\frac{1}{2}})_{i=0,\ldots,N-1}$ mit folgenden Eigenschaften:

$$\phi_i(x_j) = \delta_{ij}\,,\ \phi_i(x_{i+\frac{1}{2}}) = 0\,,\ \phi_{i+\frac{1}{2}}(x_j) = 0\,,\ \phi_{i+\frac{1}{2}}(x_{j+\frac{1}{2}}) = \delta_{ij}\,,$$

wobei $x_{i+\frac{1}{2}} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$. Zeichnen Sie ein $\phi_i$ und ein $\phi_{i+\frac{1}{2}}$.
**Tipp:** Verwenden Sie ein Referenzgebiet, wie z.B. $[-1,1]$ und definieren Sie dann die gesuchten Basisfunktionen durch geeignete Skalierung und Verschiebung.

(ii) Bestimmen Sie weiterhin die Einträge der lokalen Steifigkeitsmatrix $L$ für ein Intervall $[x_i, x_{i+1}]$, d.h. berechnen Sie

$$L_{jk} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} b_k'(x) b_j'(x) dx$$

für alle $j, k = 0, \ldots, 2N$.