Institut für Numerische Simulation
Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

universität bonn

Übungen zu Einführung in die Grundlagen der Numerik (V2E1)

Wintersemester 2015/16

Prof. Dr. Martin Rumpf — Alexander Effland — Behrend Heeren — Stefan Simon

Übungsblatt 6 — Abgabe: 8.12.2015

Aufgabe 19 — 6 Punkte

Bestimmen Sie eine schwache Lösung $u \in H^1(0,1)$ der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\begin{aligned} &-(a(x)u'(x))' = 0 \quad \forall x \in (0,1) \\ &u(0) = 0,\ u(1) = 1\,, \end{aligned}$$

wobei die Koeffizientenfunktion a gegeben ist durch

$$\begin{aligned} a(x) &= 1 \quad \text{falls } x \in (0, \tfrac{1}{3}) \\ a(x) &= \tfrac{1}{2} \quad \text{falls } x \in (\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}) \\ a(x) &= 2 \quad \text{falls } x \in (\tfrac{2}{3}, 1)\,. \end{aligned}$$

Hinweis: Betrachten Sie $v(x) = u(x) - x$, um das Problem in H_0^1 zu formulieren.

Lösung

Für die schwache Formulierung wollen wir gegen H_0^1-Funktionen testen, also betrachten wir mit $v(x) = u(x) - x$ das äquivalente Problem

$$\begin{aligned} &-(a(v+x)')' = 0 \\ &v(0) = 0 = v(1)\,. \end{aligned}$$

Dann ist die schwache Formulierung gegeben durch

$$\int_0^1 av'(x)\phi'(x)dx = -\int_0^1 a\phi'(x)dx \quad \forall \phi \in H_0^1(0,1)\,.$$

Testen mit Funktionen ϕ, die Träger in den einzelnen Teilintervallen $(0, \frac{1}{3})$, $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ und $(\frac{2}{3}, 1)$ ergibt sofort, dass v linear auf den einzelnen Teilintervallen ist, also

$$\begin{aligned} v(x) &= m_1 x \quad \text{falls } x \in (0, \tfrac{1}{3}) \\ v(x) &= m_2 x + b_2 \quad \text{falls } x \in (\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}) \\ v(x) &= m_3 x + b_3 \quad \text{falls } x \in (\tfrac{2}{3}, 1)\,. \end{aligned}$$

Weiterhin sind die Übergänge von u stetig, daher

$$v(\tfrac{1}{3}) = \tfrac{1}{3}m_1 = \tfrac{1}{3}m_2 + b_2$$
$$v(\tfrac{2}{3}) = \tfrac{2}{3}m_2 + b_2 = \tfrac{2}{3}m_3 + b_3$$
$$v(1) = m_3 + b_3 = 0$$

Um zu verstehen, was an den Sprungstellen von a passiert, testen wir mit Hütchenfunktionen. Für den Sprung bei $\frac{1}{3}$ teste mit ϕ_ϵ, die definiert ist durch $\phi_\epsilon(\frac{1}{3} - \epsilon) = \phi_\epsilon(\frac{1}{3} + \epsilon) = 0$, $\phi_\epsilon(\frac{1}{3}) = 1$, ϕ_ϵ linear auf $(\frac{1}{3} - \epsilon, \epsilon)$ und $(\epsilon, \frac{1}{3} + \epsilon)$. Dann ergibt sich durch Einsetzen in die schwache Formulierung und Grenzübergang $\epsilon \to 0$:

$$m_1 - \frac{1}{2}m_2 = -\frac{1}{2}$$

und analog für den Sprung bei $a = \frac{2}{3}$:

$$\frac{1}{2}m_2 - 2m_3 = \frac{3}{2}$$

Lösen der Gleichungen nach m_1, m_2, m_3, b_2, b_3 ergibt:

$$m_1 = -\tfrac{1}{7}\,, m_2 = \tfrac{5}{7}\,, m_3 = -\tfrac{4}{7}$$
$$b_2 = -\tfrac{2}{7}\,, b_3 = \tfrac{4}{7}$$

Entsprechend ist die gesuchte Funktion u gegeben durch

$$u(x) = \tfrac{6}{7}x \quad \text{falls } x \in (0, \tfrac{1}{3})$$
$$u(x) = \tfrac{12}{7}x - \tfrac{2}{7} \quad \text{falls } x \in (\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3})$$
$$u(x) = \tfrac{3}{7}x + \tfrac{4}{7} \quad \text{falls } x \in (\tfrac{2}{3}, 1)\,.$$

Aufgabe 20 **6 Punkte**

(i) Sei $T \subset \mathbb{R}^2$ ein Dreieck. Zeigen Sie für eine Funktion $q \in C^0(\overline{T}, \mathbb{R}^2) \cap C^1(T, \mathbb{R}^2)$:

$$\int_T \operatorname{div} q(x) dx = \int_{\partial T} q(x) \cdot n(x) d\mathcal{H}^{n-1}(x)\,.$$

Hierbei bezeichnet n den äußeren Einheitsnormalenvektor und $\mathcal{H}^{n-1}$ das $(n-1)$-dimensionale Hausdorff-Maß.
Hinweis: Zerschneiden Sie T derart, dass die Schnittgerade eine Parallele zur x-Achse ist und einen Eckpunkt enthält (falls keine Seite von T parallel zur x-Achse liegt). Beweisen Sie den Satz separat für jedes der beiden entstehenden Dreiecke.

(ii) Zeigen Sie die obige Aussage für polygonal berandete konvexe Flächen.
Hinweis: Verwenden Sie (i).

Lösung

(i) Wir benutzen den Hinweis und betrachten also ein Dreieck (von möglicherweise zwei Dreiecken), bei dem eine Seite parallel zur x-Achse liegt. Wegen der Linearität können wir ohne Beschränkung $q = (q_1, 0)$ annehmen, der allgemeine Fall folgt nach Summation. Seien ψ_1, ψ_2 so gewählt, dass $(\psi_i(y), y)$ $(i = 1, 2)$ die Kanten beschreiben mit ψ_i linear, die nicht parallel zur x-Achse liegen, also

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times [y_{min}, y_{max}] : \ \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\} .$$

Dann gilt

$$\int_T \operatorname{div} q dx dy = \int_{y_{min}}^{y_{max}} \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \frac{\partial}{\partial x} q_1 dx dy = \int_{y_{min}}^{y_{max}} q_1(\psi_2(y), y) - q_1(\psi_1(y), y) dy .$$

Die Seite S_2 ist gegeben durch die beiden Endpunkte

$$(\psi_2(y_{min}), y_{min}) \quad \text{und} \quad (\psi_2(y_{max}), y_{max}) .$$

Die Seite S_2 wird parametrisiert durch

$$[y_{min}, y_{max}] \ni y \mapsto \begin{pmatrix} \psi_2(y) \\ y \end{pmatrix}$$

mit Tangentialvektor

$$\begin{pmatrix} \psi_2'(y) \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Daher ist die äußere Einheits-Normale gegeben durch

$$n_2(y) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\psi_2'(y))^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\psi_2'(y) \end{pmatrix}$$

für $\psi_2' < 0$ (für anderes Vorzeichen ändert sich die äußere Einheits-Normale entsprechend). Daher gilt

$$\int_{y_{min}}^{y_{max}} q_1(\psi_2(y), y) dy = \int_{S_2} q \cdot n_2 d\mathcal{H}^{n-1}(y)$$

wegen der Definition des Oberflächenintegrals. Der andere Fall folgt analog, was die Behauptung beweist.
(ii) Dies folgt aus (i), wenn man T geeignet trianguliert. Eine mögliche Triangulierung erhält man, wenn - man ausgehend von einem Eckknoten - diesen mit allen weiteren Eckknoten verbindet. Nun gilt (T_i bezeichnen die Dreiecke):

$$\sum_{i=0}^{n} \int_{T_i} \operatorname{div} q(x) dx = \sum_{i=0}^{n} \int_{\partial T_i} q(x) \cdot n(x) d\mathcal{H}^{n-1}(x) .$$

Falls $\overline{T}_i \cap \overline{T}_j$ eine Kante im Innern bilden, so heben sich wegen der unterschiedlichen Orientierung von n die Beiträge der Oberflächenintegrale entlang dieser Kante auf und man erhält die gewünschte Aussage.

Aufgabe 21 **6 Punkte**

Auf dem Intervall $[0,1]$ betrachten wir eine Zerlegung in Intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ mit $x_i = \frac{i}{N}$, $i = 0, \dots, N$. Für $h = \frac{1}{N}$ definieren wir den Finite-Elemente-Raum

$$V_h^2([0,1]) = \left\{ v \in C^0([0,1], \mathbb{R}) \ : \ v\big|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathcal{P}_2([x_i, x_{i+1}]) \ \forall i = 0, \dots, N-1 \right\} .$$

Hierbei ist $\mathcal{P}_2([x_i, x_{i+1}])$ die Menge aller quadratischen Polynome auf $[x_i, x_{i+1}]$.

(i) Geben Sie eine Basis $(b_k)_{k=0,\dots,2N}$ von $V_h^2([0,1])$ an. Verwenden Sie dazu stückweise quadratische Funktionen $(\phi_i)_{i=0,\dots,N}$ und $(\phi_{i+\frac{1}{2}})_{i=0,\dots,N-1}$ mit folgenden Eigenschaften:

$$\phi_i(x_j) = \delta_{ij}\,,\ \phi_i(x_{i+\frac{1}{2}}) = 0\,,\ \phi_{i+\frac{1}{2}}(x_j) = 0\,,\ \phi_{i+\frac{1}{2}}(x_{j+\frac{1}{2}}) = \delta_{ij}\,,$$

wobei $x_{i+\frac{1}{2}} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$. Zeichnen Sie ein ϕ_i und ein $\phi_{i+\frac{1}{2}}$.
Tipp: Verwenden Sie ein Referenzgebiet, wie z.B. $[-1,1]$ und definieren Sie dann die gesuchten Basisfunktionen durch geeignete Skalierung und Verschiebung.

(ii) Bestimmen Sie weiterhin die Einträge der lokalen Steifigkeitsmatrix L für ein Intervall $[x_i, x_{i+1}]$, d.h. berechnen Sie

$$L_{jk} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} b_k'(x) b_j'(x) dx$$

für alle $j, k = 0, \dots, 2N$.

Lösung

(i) Zunächst betrachten wir auf dem Referenzgebiet $[-1,1]$ Funktionen

$$\phi(x) = \begin{cases} (1+x)(1+2x) & -1 \le x \le 0 \\ (1-x)(1-2x) & 0 \le x \le 1 \\ 0 & sonst \end{cases}$$

und

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 - 4x^2 & |x| \le \frac{1}{2} \\ 0 & sonst \end{cases}$$

Damit können wir ϕ_i definieren durch

$$\phi_i(x) = \phi\left(\frac{x - x_i}{h}\right)$$

und $\phi_{i+\frac{1}{2}}$ durch

$$\phi_{i+\frac{1}{2}}(x) = \psi\left(\frac{x - x_{i+\frac{1}{2}}}{h}\right) .$$

(ii) Für die lokale Steifigkeitsmatrix auf $[x_i, x_{i+1}]$ sind folgende Integrale zu berechnen:

$$
\begin{aligned}
&\int_{x_i}^{x_{i+1}} (\phi_{i+\frac{1}{2}})'(x)(\phi_{i+\frac{1}{2}})'(x)dx = \frac{16}{3h}\,,\\
&\int_{x_i}^{x_{i+1}} (\phi_i)'(x)(\phi_i)'(x)dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\phi_{i+1})'(x)(\phi_{i+1})'(x)dx = \frac{7}{3h}\,,\\
&\int_{x_i}^{x_{i+1}} (\phi_i)'(x)(\phi_{i+\frac{1}{2}})'(x)dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\phi_{i+1})'(x)(\phi_{i+\frac{1}{2}})'(x)dx = -\frac{8}{3h}\,,\\
&\int_{x_i}^{x_{i+1}} (\phi_i)'(x)(\phi_{i+1})'(x)dx = \frac{1}{3}h\,.
\end{aligned}
$$

Alle übrigen Einträge sind Null, da die Träger der anderen Basisfunktionen ausserhalb des Intervalls liegen.