Institut für Numerische Simulation
Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

universität bonn

Übungen zu Einführung in die Grundlagen der Numerik (V2E1)

Wintersemester 2015/16

Prof. Dr. Martin Rumpf — Alexander Effland — Behrend Heeren — Stefan Simon

Übungsblatt 7 — Abgabe: 15.12.2015

Aufgabe 22 — **6 Punkte**

(i) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet. Zeigen Sie, dass für jede Funktion $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ gilt:

$$\left| \int_\Omega f(x)dx \right| \leq \int_\Omega |f(x)|\, dx\,.$$

(ii) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet mit C^1-Rand und $p = 1$. Zeigen Sie, dass für jede Funktion $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ mit $f = 0$ auf $\partial\Omega$ eine Konstante C existiert (die nur von Ω abhängt), so dass gilt:

$$\left(\int_\Omega |f(x)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left(\int_\Omega |\nabla f(x)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}}\,. \tag{1}$$

(iii) Zeigen Sie (1) für $p = 2$.
Anmerkung: Alle obigen Aussagen gelten auch für Sobolev-Funktionen und sind nur Spezialfälle allgemeinerer Sätze.

Lösung

(i) Sei $S^+ = f^{-1}([0,\infty))$ und $S^- = \Omega \backslash S^+$. Dann ist

$$\begin{aligned} &\left| \int_\Omega f(x)dx \right| = \left| \int_{S^+} f(x)dx + \int_{S^-} f(x)dx \right| \\ \leq &\left| \int_{S^+} f(x)dx \right| + \left| \int_{S^-} f(x)dx \right| = \int_\Omega |f(x)|\, dx\,. \end{aligned}$$

(ii) Nach einer Translation können wir $\Omega \subset [0,R]^2$ annehmen. Weiterhin setze $f(x) = 0$ auf $[0,R]^2 \backslash \Omega$ fort. Es gilt also wegen (i)

$$|f(x_1,x_2)| = \left| \int_0^{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} f(t,x_2)dt \right| \leq \int_0^R \left| \frac{\partial}{\partial x_1} f(t,x_2) \right| dt\,. \tag{2}$$

Eine Integration bzgl. Ω liefert sofort

$$\int_\Omega |f(x)| \leq R \int_\Omega \left| \frac{\partial}{\partial x_1} f(x) \right| dx\,.$$

Gleiches gilt für die zweite Komponente, was nach Summation (1) beweist.
(iii) Man wendet die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung für Integrale in (2) an, der Rest folgt wie in (ii) mit einer anderen Konstanten C.

Aufgabe 23 **4 Punkte**

Zeigen Sie, dass die Matrix $\mathbf{A}_h \in \mathbb{R}^{N,N}$ mit:

$$\mathbf{A}_h := \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

die Eigenwerte

$$\lambda_i := \frac{4}{h} \sin^2\left(\frac{i\pi h}{2}\right) \quad \text{mit} \quad h := \frac{1}{N+1}$$

besitzt. Wie lauten die zugehörigen Eigenvektoren $\mathbf{x}_i$?
Hinweis: Machen Sie den Ansatz: $\mathbf{x}_i^1 = \sin(i\pi h)$.

Lösung

Es gilt für einen beliebigen Eigenwert λ_i mit Eigenvektor $\mathbf{x}_i = (x_i^1, \ldots, x_i^N)^T$ sowie $x_i^0 = x_i^{N+1} = 0$:

$$-x_i^{j-1} + 2x_i^j - x_i^{j+1} = \lambda_i x_i^j \quad 1 \leq j \leq N\,,$$

also folgt $-x_i^{j-1} + (2 - \lambda_i)x_i^j - x_i^{j+1} = 0$. Es ergibt sich damit der Eigenvektor

$$\mathbf{x}_i = (\sin(i\pi h), \sin(2i\pi h), \ldots, \sin(Ni\pi h))^T\ .$$

Dies folgt durch direktes Nachrechnen mittels Additionstheoremen.

Aufgabe 24 **4 Punkte**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein polygonal berandetes Gebiet. Wir betrachten die partielle Differentialgleichung

$$\begin{aligned} -\triangle u &= g \quad \text{in}\ \Omega\,, \\ u &= 0 \quad \text{auf}\ \partial\Omega \end{aligned}$$

mit $g \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^{<0})$. Wir betrachten ein Dreiecksgitter $\mathcal{T}$ auf Ω, wobei alle Innenwinkel kleiner gleich $\frac{\pi}{2}$ sind. Weiterhin sei $V^1(\mathcal{T})$ der Raum der stückweise affinen finiten Elemente bzgl. $\mathcal{T}$.
Beweisen Sie folgendes diskretes Maximumprinzip:
Sei $U \in V^1(\mathcal{T})$ eine diskrete Lösung obiger PDG. Dann nimmt U das Maximum auf einem Randpunkt an.

Lösung

Die Steifigkeitsmatrix $\mathbf{A}_h$ hat Einträge

$$a_{ij} = \sum_{T \in \mathcal{T}} \left\langle \nabla \psi_j, \nabla \psi_i \right\rangle_T \,.$$

Da auf jedem Dreieck T für die Summe der Basisfunktionen $\sum_{j=1}^{3} \psi_j = 1$ gilt, ist daher

$$\langle \nabla \psi_i, \nabla \psi_i \rangle_T = - \sum_{j \neq i} \left\langle \nabla \psi_j, \nabla \psi_i \right\rangle_T \,.$$

Daher ist

$$a_{ii} = - \sum_{j \neq i} a_{ij}$$

Weiterhin ist aus der Vorlesung bekannt, dass für Dreiecke mit Innenwinkel kleiner gleich $\frac{\pi}{2}$ und $i \neq j$:

$$\left\langle \nabla \psi_j, \nabla \psi_i \right\rangle_T \leq 0 \,.$$

Somit sind alle a_{ij} negativ. Nach Voraussetzung gilt für einen inneren Punkt

$$U_i < \sum_{j \neq i} \frac{-a_{ij}}{a_{ii}} U_j$$

Angenommen, das Maximum wird in einem Punkt mit Index i angenommen. Da die $\frac{-a_{ij}}{a_{ii}}$ nicht negative Gewichte sind, die sich zu 1 addieren, muss somit $U_j > U_i$ für einen benachbarten Knoten mit Index j gelten.