Übungen zu Einführung in die Grundlagen der Numerik (V2E1)

Wintersemester 2015/16

Prof. Dr. Martin Rumpf — Alexander Effland — Behrend Heeren — Stefan Simon

Übungsblatt 8 — Abgabe: 22.12.2015

Aufgabe 25 **4 Punkte**

Wir betrachten erneut die Wärmeleitungsgleichung (vgl. Anwesenheitsblatt 5). Sei dazu $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein polygonales Gebiet, $I = (0,1)$ ein Zeitintervall, $f \in C^0(\Omega)$ eine äußere Wärmequelle und $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ die gegebene Wärmeverteilung zum Zeitpunkt $t = 0$. Die schwache Formulierung der Wärmeleitungsgleichung ist dann gegeben durch

$$\int_\Omega \partial_t u(t,x)\phi(x) + \nabla u(t,x) \cdot \nabla\phi(x) - f(x)\phi(x)\, dx = 0 \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega)\ \forall t \in I\,.$$

(i) Diskretisieren Sie die schwache Formulierung der Wärmeleitungsgleichung mit stückweise affinen, stetigen FE-Funktionen auf einem Dreicksgitter $\mathcal{T}$ im Ort und finiten Differenzen mit Schrittweite τ in der Zeit. Zur Zeit $t^k = t^{k-1} + \tau$ wird die Ableitung $\partial_t u$ also diskretisiert durch $\frac{u_h^k - u_h^{k-1}}{\tau}$. Weiterhin betrachtet man für ein explizites Verfahren die Ableitung ∇u_h zur alten Zeit t^{k-1} und für ein implizites Verfahren zur neuen Zeit t^k. Leiten Sie jeweils ein Iterationsverfahren für die diskrete Lösung her.
Hinweis: Benutzen Sie Massen- und Steifigkeitsmatrizen $\mathbf{M}_h$ und $\mathbf{A}_h$ mit Einträgen

$$m_{ij} = \sum_{T\in\mathcal{T}} \int_T \phi_h^j \phi_h^i \, dx\,, \quad a_{ij} = \sum_{T\in\mathcal{T}} \int_T \nabla\phi_h^j \cdot \nabla\phi_h^i \, dx\,.$$

(ii) Wir betrachten den Interpolationsoperator $\mathcal{I}_h : C^0(\mathcal{T}) \to P_1(\mathcal{T})$, sodass $\mathcal{I}_h(g)$ eine affine Funktion auf T ist gegeben durch

$$\mathcal{I}_h(g)(x_k) = g(x_k)$$

für alle Knotenpunkte x_k.
Die gelumpte Massenmatrix $\mathbf{M}_h^l$ ist dann definiert durch die Einträge

$$m_{ij}^l = \sum_{T\in\mathcal{T}} \int_T \mathcal{I}_h(\phi_h^j \phi_h^i)\, dx\,.$$

Zeigen Sie, dass $\mathbf{M}_h^l$ Diagonalgestalt hat.
(iii) Tauschen Sie im expliziten Iterationsverfahren aus (i) die Massenmatrix $\mathbf{M}_h$ mit der gelumpten Massenmatrix $\mathbf{M}_h^l$ aus. Welchen Vorteil hat dies für die Laufzeit?

Aufgabe 26 **4 Punkte**

Betrachten Sie eine Dreiecksgitter $\mathcal{T}_h$ in $\mathbb{R}^2$, wobei alle Dreiecke $T \in \mathcal{T}$ gleichseitig mit Seitenlänge h sind. Weiterhin bezeichne I die Indexmenge der Knoten in $\mathcal{T}$. Bestimmen Sie für stückweise affine, stetige finite Elemente-Funktionen auf $\mathcal{T}$ die Einträge der globalen Steifigkeitsmatrix $\mathbf{A}_h$ für einen inneren Knoten mit Index $i \in I$, d.h. berechnen Sie

$$a_{ij} = \sum_{T \in \mathcal{T}} \int_T \nabla \phi_h^j \cdot \nabla \phi_h^i \, dx$$

für alle $j \in I$, wobei $(\phi_h^i)_{i \in I}$ die Menge der nodalen Basisfunktionen bezeichnet.

Aufgabe 27 **4 Punkte**

Es sind zwei "Ringe" mit der Parametrisierung $\phi \mapsto (R_i \cos(\phi), R_i \sin(\phi), h_i)^T$ mit $0 < R_1 < R_2$ und $h_i \in \mathbb{R}$ gegeben (mit $|R_1 - R_2|$ und $|h_1 - h_2|$ hinreichend klein). Zwischen diesen "Ringen" soll eine Fläche $\mathcal{M}_v$ mit minimalen Inhalt gespannt werden. Die Parametrisierung dieser Fläche ist wie folgt:

$$\mathbf{X} : (r, \phi) \in [R_1, R_2] \times (0, 2\pi) \mapsto \begin{pmatrix} r\cos(\phi) \\ r\sin(\phi) \\ v(r, \phi) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_v$$

mit $v \in C^1((R_1, R_2) \times (0, 2\pi), \mathbb{R}) \cap C^0([R_1, R_2] \times [0, 2\pi], \mathbb{R})$ und $v(R_i, \phi) = h_i$, $\phi \in (0, 2\pi)$.

(i) Zeigen Sie, dass für rotationssymmetrische v die Minimierung dieser Fläche äquivalent zur Minimierung von

$$E[u] = \int_{R_1}^{R_2} 2\pi r \sqrt{1 + (u'(r))^2} dr \tag{1}$$

mit $u \in C^1((R_1, R_2), \mathbb{R}) \cap C^0([R_1, R_2], \mathbb{R})$ und $u(R_i) = h_i$ ist.

Hinweis: Benutzen Sie die Formel für den Flächeninhalt parametrisierter Flächen mit Parametrisierung $\mathbf{X} : \mathcal{S} \to \mathcal{M}_u$:

$$\text{Area}(\mathcal{M}_u) = \int_{\mathcal{S}} \sqrt{\det(D\mathbf{X}^T(x) \cdot D\mathbf{X}(x))} dx \,.$$

(ii) Wie lautet die notwendige Bedingung für einen glatten Minimierer von (1)?

Aufgabe 28 **4 Punkte**

(i) Finden Sie mittels Gerschgorin-Kreisen eine Abschätzung für die Eigenwerte von

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} .$$

(ii) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & a & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

eine M-Matrix?