Institut für Numerische Simulation
Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

universitätbonn

Übungen zu Einführung in die Grundlagen der Numerik (V2E1)

Wintersemester 2015/16

Prof. Dr. Martin Rumpf — Alexander Effland — Behrend Heeren — Stefan Simon

Übungsblatt 8 — Abgabe: 22.12.2015

Aufgabe 25 — 4 Punkte

Wir betrachten erneut die Wärmeleitungsgleichung (vgl. Anwesenheitsblatt 5). Sei dazu $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein polygonales Gebiet, $I = (0,1)$ ein Zeitintervall, $f \in C^0(\Omega)$ eine äußere Wärmequelle und $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ die gegebene Wärmeverteilung zum Zeitpunkt $t = 0$. Die schwache Formulierung der Wärmeleitungsgleichung ist dann gegeben durch

$$\int_\Omega \partial_t u(t,x)\phi(x) + \nabla u(t,x) \cdot \nabla\phi(x) - f(x)\phi(x)\, dx = 0 \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega)\ \forall t \in I\,.$$

(i) Diskretisieren Sie die schwache Formulierung der Wärmeleitungsgleichung mit stückweise affinen, stetigen FE-Funktionen auf einem Dreicksgitter $\mathcal{T}$ im Ort und finiten Differenzen mit Schrittweite τ in der Zeit. Zur Zeit $t^k = t^{k-1} + \tau$ wird die Ableitung $\partial_t u$ also diskretisiert durch $\frac{u_h^k - u_h^{k-1}}{\tau}$. Weiterhin betrachtet man für ein explizites Verfahren die Ableitung ∇u_h zur alten Zeit t^{k-1} und für ein implizites Verfahren zur neuen Zeit t^k. Leiten Sie jeweils ein Iterationsverfahren für die diskrete Lösung her.
Hinweis: Benutzen Sie Massen- und Steifigkeitsmatrizen $\mathbf{M}_h$ und $\mathbf{A}_h$ mit Einträgen

$$m_{ij} = \sum_{T\in\mathcal{T}} \int_T \phi_h^j \phi_h^i\, dx\,, \quad a_{ij} = \sum_{T\in\mathcal{T}} \int_T \nabla\phi_h^j \cdot \nabla\phi_h^i\, dx\,.$$

(ii) Wir betrachten den Interpolationsoperator $\mathcal{I}_h : C^0(\mathcal{T}) \to P_1(\mathcal{T})$, sodass $\mathcal{I}_h(g)$ eine affine Funktion auf T ist gegeben durch

$$\mathcal{I}_h(g)(x_k) = g(x_k)$$

für alle Knotenpunkte x_k.
Die gelumpte Massenmatrix $\mathbf{M}_h^l$ ist dann definiert durch die Einträge

$$m_{ij}^l = \sum_{T\in\mathcal{T}} \int_T \mathcal{I}_h(\phi_h^j \phi_h^i)\, dx\,.$$

Zeigen Sie, dass $\mathbf{M}_h^l$ Diagonalgestalt hat.
(iii) Tauschen Sie im expliziten Iterationsverfahren aus (i) die Massenmatrix $\mathbf{M}_h$ mit der gelumpten Massenmatrix $\mathbf{M}_h^l$ aus. Welchen Vorteil hat dies für die Laufzeit?

Lösung

(i) Es gilt für ein explizites Verfahren

$$\mathbf{M}_h \left(\frac{u_h^k - u_h^{k-1}}{\tau} \right) + \mathbf{A}_h u_h^{k-1} = \mathbf{M}_h f_h \, .$$

Also ist die Rekursionsformel gegeben durch

$$\mathbf{M}_h u_h^k = \mathbf{M}_h u_h^{k-1} + \tau(\mathbf{M}_h f_h - \mathbf{A}_h u_h^{k-1}) \, .$$

Für ein implizites Verfahren gilt

$$\mathbf{M}_h \left(\frac{u_h^k - u_h^{k-1}}{\tau} \right) + \mathbf{A}_h u_h^{k} = \mathbf{M}_h f_h \, .$$

Also ist die Rekursionsformel gegeben durch

$$(\mathbf{M}_h + \tau \mathbf{A}_h) u_h^k = \mathbf{M}_h u_h^{k-1} + \tau \mathbf{M}_h f_h \, .$$

(ii) $\mathbf{M}_h^l$ hat Diagonalgestalt, da für $i \neq j$

$$\mathcal{I}_h(\phi_h^i \phi_h^j)(x_k) = \phi_h^i(x_k)\phi_h^j(x_k) = 0 \, .$$

(iii) Da $\mathbf{M}_h^l$ Diagonalgestalt hat, muss nur eine Diagonalmatrix invertiert werden. Dies benötigt nur lineare Laufzeit in der Anzahl der Knoten. Unter Verwendung von $\mathbf{M}_h$ muss ein lineares Gleichungssystem gelöst werden, wobei $\mathbf{M}_h$ zwar dünn besetzt ist, aber keine Diagonalgestalt hat.

Aufgabe 26 **4 Punkte**

Betrachten Sie eine Dreiecksgitter $\mathcal{T}_h$ in $\mathbb{R}^2$, wobei alle Dreiecke $T \in \mathcal{T}$ gleichseitig mit Seitenlänge h sind. Weiterhin bezeichne I die Indexmenge der Knoten in $\mathcal{T}$. Bestimmen Sie für stückweise affine, stetige finite Elemente-Funktionen auf $\mathcal{T}$ die Einträge der globalen Steifigkeitsmatrix $\mathbf{A}_h$ für einen inneren Knoten mit Index $i \in I$, d.h. berechnen Sie

$$a_{ij} = \sum_{T \in \mathcal{T}} \int_T \nabla \phi_h^j \cdot \nabla \phi_h^i \, dx$$

für alle $j \in I$, wobei $(\phi_h^i)_{i \in I}$ die Menge der nodalen Basisfunktionen bezeichnet.

Lösung

Da die Dreiecke gleichseitig sind, gilt $|T| = \frac{\sqrt{3}h^2}{4}$.
Weiterhin wissen wir aus der Vorlesung, dass

$$\int_T \nabla \phi_h^j \cdot \nabla \phi_h^i \, dx = \frac{1}{4|T|} \left\langle S_i, S_j \right\rangle ,$$

wobei S_i und S_j die jeweiligen Seiten im Dreieck T gegenüberliegend zu den Knoten i bzw. j bezeichnet.
Jeder innere Knoten mit Index i hat 6 anliegende Dreiecke, daher ist

$$a_{ii} = 6 \frac{1}{\sqrt{3}h^2} h^2 = 2\sqrt{3} \,.$$

Weiterhin gibt es für jeden benachbarten Knoten mit Index j zwei Dreiecke, die beide Knoten mit Index i und j besitzen. Man rechnet leicht nach, dass

$$\left\langle S_i, S_j \right\rangle = -\frac{h^2}{2} \,.$$

Damit ist

$$a_{ij} = -2 \frac{1}{\sqrt{3}h^2} \frac{h^2}{2} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \,.$$

Aufgabe 27 **4 Punkte**

Es sind zwei "Ringe" mit der Parametrisierung $\phi \mapsto (R_i \cos(\phi), R_i \sin(\phi), h_i)^T$ mit $0 < R_1 < R_2$ und $h_i \in \mathbb{R}$ gegeben (mit $|R_1 - R_2|$ und $|h_1 - h_2|$ hinreichend klein). Zwischen diesen "Ringen" soll eine Fläche $\mathcal{M}_v$ mit minimalen Inhalt gespannt werden. Die Parametrisierung dieser Fläche ist wie folgt:

$$\mathbf{X} : (r, \phi) \in [R_1, R_2] \times (0, 2\pi) \mapsto \begin{pmatrix} r\cos(\phi) \\ r\sin(\phi) \\ v(r,\phi) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_v$$

mit $v \in C^1((R_1, R_2) \times (0, 2\pi), \mathbb{R}) \cap C^0([R_1, R_2] \times [0, 2\pi], \mathbb{R})$ und $v(R_i, \phi) = h_i$, $\phi \in (0, 2\pi)$.

(i) Zeigen Sie, dass für rotationssymmetrische v die Minimierung dieser Fläche äquivalent zur Minimierung von

$$E[u] = \int_{R_1}^{R_2} 2\pi r \sqrt{1 + (u'(r))^2} dr \tag{1}$$

mit $u \in C^1((R_1, R_2), \mathbb{R}) \cap C^0([R_1, R_2], \mathbb{R})$ und $u(R_i) = h_i$ ist.
Hinweis: Benutzen Sie die Formel für den Flächeninhalt parametrisierter Flächen mit Parametrisierung $\mathbf{X} : \mathcal{S} \to \mathcal{M}_u$:

$$\text{Area}(\mathcal{M}_u) = \int_{\mathcal{S}} \sqrt{\det(D\mathbf{X}^T(x) \cdot D\mathbf{X}(x))} dx \,.$$

(ii) Wie lautet die notwendige Bedingung für einen glatten Minimierer von (1)?

Lösung

(i) Wegen der Rotationssymmetrie gilt $u(r) = v(r, \phi)$ für alle ϕ. Man rechnet nach:

$$D\mathbf{X}(r, \phi) = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -r\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & r\cos(\phi) \\ u'(r) & 0 \end{pmatrix}$$

und $\det(D\mathbf{X}^T(x) \cdot D\mathbf{X}(r)) = r^2(1 + (u'(r))^2)$. Daher gilt

$$\text{Area}(\mathcal{M}_u) = \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \sqrt{r^2(1 + (u'(r))^2)} dr d\phi = E[u] \,.$$

(ii) Sei u wie in (i) ein glatter Minimierer und $w \in C^1((R_1, R_2), \mathbb{R}) \cap C^0([R_1, R_2], \mathbb{R})$ mit $w(R_i) = 0$. Setze $j(\epsilon) = E[u + \epsilon w]$. Dann gilt $j(0) \leq j(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, also folgt aus $j'(0) = 0$

$$0 = \int_{R_1}^{R_2} \frac{2\pi r u'(r)}{\sqrt{1 + (u'(r))^2}} w'(r) dr = -\int_{R_1}^{R_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \left(\frac{2\pi r u'(r)}{\sqrt{1 + (u'(r))^2}} \right) w(r) dr \,,$$

also nach dem Fundamentallemma der Variationsrechnung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \left(\frac{r u'(r)}{\sqrt{1 + (u'(r))^2}} \right) = 0 \,.$$

Aufgabe 28 **4 Punkte**

(i) Finden Sie mittels Gerschgorin-Kreisen eine Abschätzung für die Eigenwerte von

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} .$$

(ii) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & a & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

eine M-Matrix?

Lösung

(i) Da die Matrix symmetrisch und reell ist, folgen für die Eigenwerte die Intervalle

$$\lambda_1 \in [7, 9], \quad \lambda_2 = 7, \quad \lambda_3 \in [4, 6] \, .$$

(ii) Eine Z-Matrix erfüllt $z_{i,j} \leq 0$ für $i \neq j$. Eine M-Matrix ist eine Z-Matrix, bei der der Realteil der Eigenwerte positiv ist. Offensichtlich ist $\mathbf{A}$ eine Z-Matrix. Als charakteristisches Polynom ergibt sich

$$(1 - \lambda) \left((1 - \lambda)(a - \lambda) - 2 \right) \, .$$

Die kleinere Nullstelle λ_3 von $(1 - \lambda)(a - \lambda) - 2$ ist

$$\frac{1 + a}{2} - \sqrt{\left(\frac{1 + a}{2} \right)^2 - a + 2} \, ,$$

so dass sofort folgt $\lambda_3 > 0 \Leftrightarrow a > 2 \Leftrightarrow \mathbf{A}$ ist M-Matrix.