

Aufgabe 3: Berechnen Sie die Länge zweier Kurven auf der Erdoberfläche (im Kugelmodell), die St. Petersburg ($60^\circ N$, $30^\circ O$) mit Anchorage in Alaska ($60^\circ N$, $150^\circ W$) verbinden.

- Geben Sie die Koordinaten φ und ϑ (bzgl. der Parametrisierung aus der Vorlesung) der beiden Punkte im Bogenmaß an.
- Geben Sie eine Parametrisierung der Kurve (im Parameterbereich) an, die die beiden Punkte entlang des gemeinsamen Breitenkreises verbindet.
- Geben Sie eine Parametrisierung der Kurve (im Parameterbereich) an, die die beiden Punkte entlang zweier Meridiane über den Nordpol verbindet. Hinweis: Im Parameterbereich besteht die Kurve aus zwei Teilen.
- Berechnen Sie die Länge der beiden Kurven.

LÖSUNG:

- $\vartheta = \frac{\pi}{3}$ sowie $\varphi = \frac{\pi}{6}$ (St. Petersburg) bzw. $\varphi = -\frac{5}{6}\pi$ (Anchorage)

- $b(t) = \begin{pmatrix} t \\ \frac{\pi}{3} \end{pmatrix}$, wobei $t \in [-\frac{5}{6}\pi, \frac{\pi}{6}]$

- $m_1(t) = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{6} \\ t \end{pmatrix}$, wobei $t \in [\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}]$ und
 $m_2(t) = \begin{pmatrix} -\frac{5}{6}\pi \\ t \end{pmatrix}$, wobei $t \in [\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}]$.

(Ohne Berücksichtigung der Durchlaufrichtung, da nur nach der Länge gesucht wird)

-

$$\text{Länge}(b) = \int_{-\frac{5}{6}\pi}^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{\begin{pmatrix} R^2 \cos^2 \vartheta & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} dt = \int_{-\frac{5}{6}\pi}^{\frac{\pi}{6}} R \cos \frac{\pi}{3} dt = \frac{1}{2}\pi R$$

$$\text{Länge}(m_1) = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\begin{pmatrix} R^2 \cos^2 \vartheta & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} dt = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} R dt = \frac{1}{6}\pi R$$

Für das zweite Teilstück m_2 ergibt sich analog die selbe Länge.

Damit hat die Kurve entlang des Breitenkreises die Länge $\frac{1}{2}\pi R \approx 10\,000$ [km], die Kurve über den Nordpol insgesamt $\frac{1}{3}\pi R \approx 6\,700$ [km], also ein Drittel kürzer.

Aufgabe 4: Gegeben sei die Parametrisierung

$$x(\phi, h) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi\phi) \\ \sin(2\pi\phi) \\ h \end{pmatrix}$$

mit $\phi \in [0, 1)$ und $h \in [0, 1]$.

- a) Welche Hyperfläche beschreibt diese Parametrisierung?
- b) Betrachten Sie die Kurven

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}, & t \in [0, 1] \\ \gamma_2(t) &= \begin{pmatrix} t \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, & t \in [0, 1] \end{aligned}$$

im Parameterbereich. Beschreiben Sie die Kurven $x \circ \gamma_i$ mit $i = 1, 2$, die auf der parametrisierten Fläche liegen.

- c) Berechnen Sie mit Hilfe dieser beiden Kurven zwei Tangentialvektoren an die Fläche im Punkt $x(0, \frac{1}{2})$.
- d) Berechnen Sie in diesem Punkt einen Normalenvektor an die Fläche.
- e) Berechnen Sie den metrischen Tensor auf dieser Fläche.
- f) Verwenden Sie den metrischen Tensor, um die Länge der beiden Kurven $x \circ \gamma_i$ mit $i = 1, 2$ auf der Fläche zu berechnen.
- g) In welchem Winkel schneiden sich die beiden Kurven?

LÖSUNG:

- a) Die Parametrisierung beschreibt einen Zylindermantel. Der Zylinder hat eine Grundfläche von Radius 1, die Höhe 1 und die Symmetrieachse des Zylinders liegt auf der z -Achse des Koordinatensystems.
- b)

$$\begin{aligned} x \circ \gamma_1(t) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}, & t \in [0, 1] \\ x \circ \gamma_2(t) &= \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, & t \in [0, 1] \end{aligned}$$

Bei der Kurve $x \circ \gamma_1$ handelt es sich um eine Strecke vom Punkt $(1, 0, 0)$ zum Punkt $(1, 0, 1)$. Sie verläuft parallel zur Symmetrieachse des Zylinders und steht senkrecht auf der $x - y$ -Ebene und somit senkrecht auf der Grundfläche des Zylinders.

Die Kurve $x \circ \gamma_2$ ist eine geschlossene Kreiskurve auf dem Zylindermantel. Sie liegt auf Höhe $\frac{1}{2}$ und verläuft parallel zur Grundfläche des Zylinders.

- c) Mit Hilfe der beiden Kurven aus dem vorherigen Aufgabenteil sollen zwei Tangentialvektoren an die Fläche im Punkt

$$x\left(0, \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

berechnet werden. Da $\gamma_1\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ und $\gamma_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ gilt, berechnen wir

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(x \circ \gamma_1(t)) \Big|_{t=\frac{1}{2}} &= \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \Big|_{t=\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \frac{d}{dt}(x \circ \gamma_2(t)) \Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Big|_{t=0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\pi \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Zwei Tangentialvektoren an die Fläche im Punkt $x(0, \frac{1}{2})$ lauten also $v_1 = (0, 0, 1)^T$ und $v_2 = (0, 2\pi, 0)^T$. Da diese beiden Vektoren linear unabhängig sind, spannen sie den ganzen Tangentialraum an die Fläche im Punkt $x(0, \frac{1}{2})$ auf.

- d) Da die beiden Vektoren v_1 und v_2 den Tangentialraum an die Fläche im Punkt $x(0, \frac{1}{2})$ aufspannen, berechnet sich der Normalenvektor an die Fläche im Punkt $x(0, \frac{1}{2})$ wie folgt:

$$n = \frac{v_1 \times v_2}{\|v_1 \times v_2\|}.$$

$$\begin{aligned} v_1 \times v_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2\pi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\pi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow n &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- e) Der metrische Tensor G auf der Mantelfläche des Zylinders berechnet sich wie folgt

$$G = (Dx)^T Dx$$

und

$$Dx = \begin{pmatrix} -2\pi \sin(2\pi\phi) & 0 \\ 2\pi \cos(2\pi\phi) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} G &= (Dx)^T Dx \\ &= \begin{pmatrix} -2\pi \sin(2\pi\phi) & 2\pi \cos(2\pi\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2\pi \sin(2\pi\phi) & 0 \\ 2\pi \cos(2\pi\phi) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4\pi^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- f) Aus dem Skript wissen wir, dass sich die Länger l_1 der Kurve $x \circ \gamma_1$ auf dem Zylindermantel wie folgt mit Hilfe des metrischen Tensors berechnen lässt.

$$\begin{aligned}
 l_1 &= \int_0^1 \sqrt{G \dot{\gamma}_1(t) \cdot \dot{\gamma}_1(t)} dt \\
 &= \int_0^1 \sqrt{\begin{pmatrix} 4\pi^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} dt \\
 &= \int_0^1 \sqrt{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} dt \\
 &= \int_0^1 dt \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Für die Länge l_2 der Kurve $x \circ \gamma_2$ auf dem Zylindermantel ergibt sich

$$\begin{aligned}
 l_2 &= \int_0^1 \sqrt{G \dot{\gamma}_2(t) \cdot \dot{\gamma}_2(t)} dt \\
 &= \int_0^1 \sqrt{\begin{pmatrix} 4\pi^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} dt \\
 &= \int_0^1 \sqrt{\begin{pmatrix} 4\pi^2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} dt \\
 &= \int_0^1 2\pi dt \\
 &= 2\pi
 \end{aligned}$$

- g) Die beiden Kurven schneiden sich im Punkt $x(0, \frac{1}{2})$. Um den Winkel α zu berechnen, in dem sie sich schneiden, benötigen wir die beiden Tangentialvektoren v_1 und v_2 . Nun gilt

$$\begin{aligned}
 \cos \alpha &= \frac{v_1 \cdot v_2}{\|v_1\| \|v_2\|} \\
 &= \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2\pi \\ 0 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 2\pi \\ 0 \end{pmatrix} \right\|} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Daraus folgt die beiden Kurven schneiden sich im Winkel $\alpha = \frac{\pi}{2}$.