

Aufgabe 6: Betrachten Sie die folgenden Rotationen einer Sphäre S : Man drehe S um die y -Achse um den Winkel $\pi/2$, anschließend macht man dieselbe Operation um die z -Achse und rotiert zum Schluss noch einmal um $\pi/2$ um die x -Achse.

- Schreiben Sie die Matrix zu jeder Operation auf.
- Geben Sie die Matrix von der gesamten Operation an.
- Was hat man eigentlich getan?

LÖSUNG: Wir nehmen an, dass alle Drehungen in mathematisch positiver Drehrichtung ("Rechte-Faust-Regel" in rechthändigen Koordinatensystem) durchgeführt werden.

a) Sei

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

die kanonische Basis des \mathbb{R}^3 , f , g , und h die drei Transformationen (Abbildungen):

f sei die Rotation um die y -Achse, das heißt $f(e_2) = e_2$.

Der Rotationswinkel von f ist $\pi/2$, dadurch bekommen wir $f(e_3) = e_1$ und $f(e_1) = -e_3$.

Die Matrix von f ist dann

$$M_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

g sei die Rotation um die z -Achse und h die Rotation um die x -Achse. Durch die gleichen Überlegungen bekommen wir, dass die Matrizen zu diesen Abbildungen

$$M_g = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

und

$$M_h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

sind.

b) Nennen wir nun die gesamte Abbildung k , $k = h \circ g \circ f$ und somit ist ihre Matrix

$$M_k = M_h \cdot M_g \cdot M_f \quad (5)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

- c) Wir merken, dass wir einfach unser Objekt um mit dem Winkel $\pi/2$ um die z -Achse gedreht haben.

Aufgabe 7: Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- a) Zeigen Sie, dass es sich um eine orthogonale Matrix handelt.
- b) Berechnen Sie die Eigenwerte, Eigenvektoren und die Determinante.
- c) Handelt es sich um eine Drehung oder um eine Spiegelung?

LÖSUNG:

- a) Da $AA^T = \mathbb{1}$ gilt, handelt es sich um eine orthogonale Matrix.
- b) Die Eigenwerte der Matrix A lauten

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = i, \quad \lambda_3 = -i$$

und die zugehörigen Eigenvektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \det A &= \det \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= -1 \end{aligned}$$

- c) Es handelt sich weder um eine reine Drehung, noch um eine reine Spiegelung, sondern sowohl um eine Drehung, als auch um eine Spiegelung. Es handelt sich also um eine so genannte "Drehspiegelung", d.h. eine Drehung um $\frac{\pi}{2}$ in der xy -Ebene und eine Spiegelung an der xy -Ebene.