Aufgabe 10: a) Es sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine periodische Funktion mit Periode 2π und Lipschitz-stetig. Geben Sie die Fourierdarstellung (einschließlich der Formeln zur Berechnung der Koeffizienten) von g an.

b) Angenommen die Funktion g wäre nun π periodisch. Gilt die Fourierdarstellung weiterhin?

c) Betrachten Sie nun die spezielle Funktion

$$f(x) = \sin^2(x).$$

Begründen Sie, warum für die Fourierkoeffizienten b_k aus der Vorlesung für alle $k \geq 1$ gilt $b_k = 0$.

d) Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten a_0, a_1 und a_2 aus der Vorlesung für $f(x)$ (Tipp: Verwenden Sie zur Berechnugn von a_2: $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$. Warum gilt dies?).

LÖSUNG:

a) Die Fourierdarstellung von g lautet:

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx),$$

wobei

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(x) dx,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(x) \cos(kx) dx,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(x) \sin(kx) dx.$$

b) Da g dann π periodisch ist, ist g auch 2π periodisch und damit gilt die Fourierdarstellung noch immer.

c) Argumentativ können wir analog zur Vorlesung feststellen:

i) wg. periodisch: $\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx$

ii) $f(-x) = f(x)$: gerade /symmetrisch zur y-Achse

iii) $\sin(-kx) = -\sin(kx)$: ungerade /punktsymmetrisch zum Ursprung

iv) $f(-x)\sin(-kx) = -f(x)\sin(kx)$: ungerade /punktsymmetrisch zum Ursprung

v) $\int_{-\pi}^{\pi}$ ungerade Funktion $dx = 0$

d) Zunaechst stellen wir durch partielle Integration für a_0 fest

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \sin^2(x)dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \sin(x)\cdot\sin(x)dx \\ &= \frac{1}{\pi}[-\sin(x)\cdot\cos(x)]_0^{2\pi} - \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} -\cos(x)\cdot\cos(x)dx \\ &= \frac{1}{\pi}[-\sin(x)\cdot\cos(x)]_0^{2\pi} + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} 1-\sin^2(x)dx. \end{aligned}$$

Damit gilt:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}[-\sin(x)\cdot\cos(x)]_0^{2\pi} + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} dx = 1.$$

Kommen wir nun zu a_1. Hier gilt

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \sin^2(x)\cos(x)dx \underbrace{=}_{y=\sin(x)} \frac{1}{\pi}\int\limits_{\sin(0)}^{\sin(2\pi)} y^2dy = 0.$$

Kommen wir nun zu a_2. Hier gilt

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \sin^2(x)\cos(2x)dx \underbrace{=}_{\sin^2(x)=\frac{1}{2}(1-\cos(2x))} \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \cos(2x)-\cos^2(2x)dx \\ &\underbrace{=}_{\cos^2(x)=\frac{1}{2}(1+\cos(2x))} \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \cos(2x)-(\frac{1}{2}(1+\cos(4x))dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \cos(2x)-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(4x)dx \\ &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Hierbei gilt:

$$1-\cos(2x) = 1-(\cos^2(x)-\sin^2(x)) = 1-(1-\sin^2(x)-\sin^2(x)) = 2\sin^2(x).$$