

Aufgabe 9: Betrachten Sie das folgende vereinfachte Modell der Dichteverteilung in der Erde: Sei $K \subset \mathbb{R}^3$ eine Kugel mit Radius $6 \cdot 10^6$ (in Metern) um den Ursprung. K habe die Dichte (in kg/m^3)

$$\rho(x) = \begin{cases} 12 \cdot 10^3 - \frac{\|x\|}{1 \cdot 10^3} & \text{für } \|x\| \leq 3 \cdot 10^6, \\ 6 \cdot 10^3 - \frac{\|x\|}{3 \cdot 10^3} & \text{für } \|x\| > 3 \cdot 10^6. \end{cases}$$

Berechnen Sie die Masse von K .

LÖSUNG: Unter Verwendung von Kugelkoordinaten ergibt sich:

$$\begin{aligned} M_K &= \int_K \rho(r(x)) dx \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{6 \cdot 10^6} \rho(r) r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta \left(\int_0^{3 \cdot 10^6} 12 \cdot 10^3 r^2 - 10^{-3} r^3 dr + \int_{3 \cdot 10^6}^{6 \cdot 10^6} 6 \cdot 10^3 r^2 - \frac{1}{3} 10^{-3} r^3 dr \right) \\ &= 2\pi(-\cos \pi + \cos 0) \left(4 \cdot 10^3 r^3 - \frac{1}{4} 10^{-3} r^4 \Big|_0^{3 \cdot 10^6} + 2 \cdot 10^3 r^3 - \frac{1}{12} 10^{-3} r^4 \Big|_{3 \cdot 10^6}^{6 \cdot 10^6} \right) \\ &= 4\pi \left(108 \cdot 10^{21} - \frac{81}{4} \cdot 10^{21} + 432 \cdot 10^{21} - 108 \cdot 10^{21} - 54 \cdot 10^{21} + \frac{27}{4} \cdot 10^{21} \right) \\ &= 4\pi \frac{364}{2} \cdot 10^{21} = 1458\pi \cdot 10^{21} \approx 4,58 \cdot 10^{24} \end{aligned}$$

Die Masse der Erde beträgt tatsächlich ungefähr $5,9736 \cdot 10^{24}$ kg. Das Modell ist offensichtlich stark vereinfacht.

Aufgabe 10: a) Weisen Sie, unter Verwendung von Resultaten aus der Vorlesung, nach, dass das Trägheitsmoment Θ_L einer Kugel der Masse M mit Radius R und Dichte $\rho \equiv 1$ gegeben ist durch:

$$\Theta_L = \frac{2}{5} M R^2$$

b) Berechnen Sie das Trägheitsmoment eines Rotationsellipsoids mit Dichte $\rho \equiv 1$ bezüglich der z -Achse. Dabei entstehe das Ellipsoid durch Rotation der Ellipse $\left\{ (x, z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \leq 1 \right\}$ um die z -Achse.

Tip: Verwenden Sie eine Transformation um das Ellipsoid auf eine Kugel abzubilden. Nutzen Sie anschließend geeignete Koordinaten zur Integration.

$$\text{Es gilt } \sin^3 x = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x.$$

c) Verwenden Sie das in der Vorlesung berechnete Volumen des Rotationsellipsoids, um nachzuweisen, dass man das Trägheitsmoment eines Rotationsellipsoids mit konstanter Dichte folgendermaßen schreiben kann:

$$\Theta_L = \frac{2}{5} M a^2$$

LÖSUNG:

a) Nach Vorlesung ist $\Theta_L = \frac{8}{15} \pi R^5$. Das Volumen einer Kugel ist $\frac{4}{3} \pi R^3$. Wegen $\rho \equiv 1$ ist dies auch die Masse. Also gilt

$$\Theta_L = \frac{2}{5} \frac{4}{3} \pi R^3 R^2 = \frac{2}{5} M R^2$$

- b) Die Transformation $g(x, y, z) = (ax, ay, bz)$ bildet die Einheitskugel K_1 auf das gegebene Rotationsellipsoid E ab, also $g(K_1) = E$. Hierzu ist $\det Dg(x, y, z) = a^2b$. Zur Integration über die Einheitskugel werden Kugelkoordinaten verwendet.

$$\begin{aligned}
 \Theta_L &= \int_E d_L^2(x, y) dx dy dz \\
 &= \int_E x^2 + y^2 dx dy dz \\
 &\quad \text{(Pythagoras: Abstand eines Punktes in der } x, y\text{-Ebene vom Ursprung)} \\
 &= \int_{K_1} ((a\bar{x})^2 + (a\bar{y})^2) a^2b d\bar{x} d\bar{y} d\bar{z} \\
 &= a^4b \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (r \sin \vartheta)^2 r^2 \sin \vartheta d\varphi d\vartheta dr \\
 &\quad \text{(Abstand von der } z\text{-Achse hängt jetzt von } r \text{ und } \vartheta \text{ ab)} \\
 &= a^4b \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^4 dr \int_0^\pi \sin^3 \vartheta d\vartheta \\
 &= a^4b 2\pi \frac{1}{5} \frac{1}{4} \int_0^\pi 3 \sin \vartheta - \sin 3\vartheta d\vartheta \\
 &= a^4b \pi \frac{1}{10} [-3 \cos \vartheta + \frac{1}{3} \cos 3\vartheta]_0^\pi d\vartheta \\
 &= a^4b \pi \frac{1}{10} (3 - \frac{1}{3} + 3 - \frac{1}{3}) \\
 &= a^4b \pi \frac{1}{10} \frac{16}{3} = \frac{8}{15} a^4b \pi
 \end{aligned}$$

Bemerkung: Im Falle der Kugel in Teil a) ist $a = b = R$ und man erhält die bereits bekannte Formel.

- c) Das Volumen des Rotationsellipsoids (und wegen $\rho \equiv 1$ auch die Masse) ist $\frac{4}{3}\pi a^2b$. Zusammen mit dem obigen Ergebnis ergibt sich sofort

$$\Theta_L = \frac{2}{5} \frac{4}{3} \pi a^2b a^2 = \frac{2}{5} M a^2$$

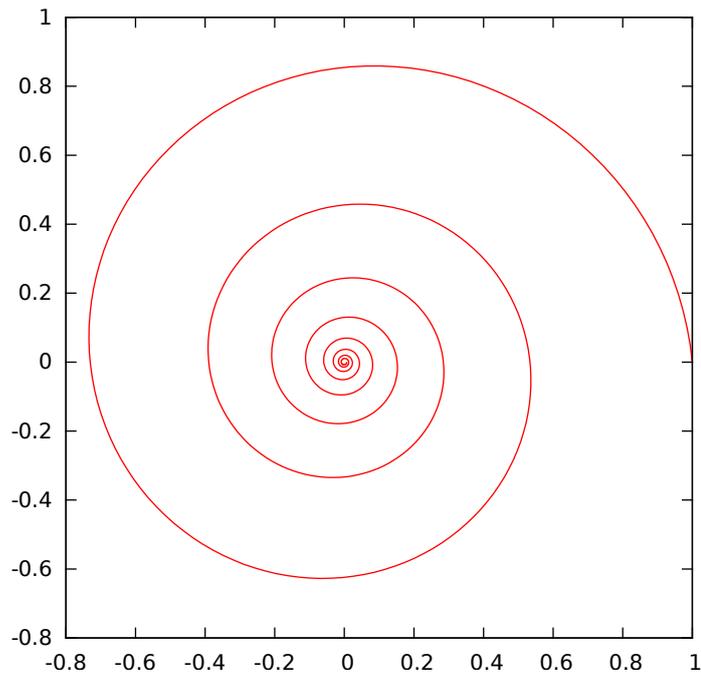
Aufgabe 11: Betrachten Sie die folgende Kurve:

$$\gamma(t) = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \quad \alpha = -\frac{1}{10}, \quad t \in [0, T]$$

- Skizzieren Sie die Kurve.
Tipp: Berechnen Sie $\gamma(0)$, $\gamma(2\pi)$, $\gamma(4\pi)$, $\gamma(6\pi)$ mit Hilfe eines Taschenrechners.
- Berechnen Sie den Betrag der Geschwindigkeit.
- Bestimmen Sie die Länge der Kurve $l(T)$.
- Was ist der Grenzwert von $l(T)$ für $T \rightarrow \infty$.

LÖSUNG:

- Es handelt sich um die sogenannte *logarithmische Spirale*:



b) Der Geschwindigkeitsvektor ist gegeben durch

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \alpha e^{\alpha t} \cos(t) + e^{\alpha t} - \sin(t) \\ \alpha e^{\alpha t} \sin(t) + e^{\alpha t} \cos(t) \end{pmatrix}$$

und somit läßt sich der Betrag der Geschwindigkeit wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} \|\dot{\gamma}(t)\| &= e^{\alpha t} \sqrt{(\alpha \cos(t) - \sin(t))^2 + (\alpha \sin(t) + \cos(t))^2} \\ &= e^{\alpha t} \sqrt{\alpha^2 \cos^2(t) + \alpha^2 \sin^2(t) + \sin^2(t) + \cos^2(t)} \\ &= e^{\alpha t} \sqrt{\alpha^2 + 1} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} l(T) &= \int_0^T \|\dot{\gamma}(s)\| ds = \sqrt{\alpha^2 + 1} \int_0^T e^{\alpha s} ds \\ &= \sqrt{\alpha^2 + 1} \left[\frac{1}{\alpha} e^{\alpha s} \right]_0^T \\ &= \frac{\sqrt{\alpha^2 + 1}}{\alpha} (e^{\alpha T} - 1) \\ &= -\sqrt{101} \left(e^{-\frac{T}{10}} - 1 \right) \end{aligned}$$

d)

$$\lim_{T \rightarrow \infty} l(T) = \sqrt{101}$$

Aufgabe 12: Sei d eine positive reelle Zahl (eine zu messende Länge in Metern).

a) Wir betrachten die beiden Punkte

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{d}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{d}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass der Abstand der beiden Punkte gleich d ist.

b) Wir betrachten die Kurve $\bar{\Gamma}$, definiert durch

$$\bar{\gamma} : \left[-\frac{d}{2}, \frac{d}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \bar{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $\bar{\Gamma}$ die Punkte A und B verbindet.

Berechnen Sie die Länge von $\bar{\Gamma}$.

Um welche Kurve handelt es sich?

c) Sei

$$R = \frac{6,37 \cdot 10^6}{0,13}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{R^2 - \frac{d^2}{4}} \end{pmatrix}, \quad T = \arcsin\left(\frac{d}{2R}\right).$$

Wir betrachten die Kurve $\tilde{\Gamma}$, definiert durch

$$\tilde{\gamma} : [-T, T] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \tilde{\gamma}(t) = M + R \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $\tilde{\Gamma}$ die Punkte A und B verbindet.

Berechnen Sie die Länge von $\tilde{\Gamma}$.

Um welche Kurve handelt es sich?

d) Fertigen Sie eine Skizze der Situation an.

e) Welche Kurve ist länger?

Wie groß ist die Längendifferenz für $d = 100; 1000; 10000$ [m]?

Wie groß ist der Abstand $\|\tilde{\gamma}(0) - \bar{\gamma}(0)\|$ für diese Werte von d ?

f) $L(d) = 2R \arcsin\left(\frac{d}{2R}\right)$ ist die Länge von $\tilde{\Gamma}$.

Berechnen Sie die Taylor-Entwicklung von $\arcsin(x)$ um $x = 0$ mit Fehlerterm vierter Ordnung.

Verwenden Sie diese, um eine Näherungsformel für die Längendifferenz zu finden.

Vergleichen Sie deren Ergebnisse mit den exakten Ergebnissen für $d = 100; 1000; 10000$ [m].

LÖSUNG:

a) $\|B - A\| = d$

b)

$$\tilde{\gamma}\left(-\frac{d}{2}\right) = A, \quad \tilde{\gamma}\left(\frac{d}{2}\right) = B, \quad \tilde{\gamma} \text{ stetig}$$

$$\|\dot{\tilde{\gamma}}(t)\| = 1$$

$$\int_{\tilde{\Gamma}} 1 \, dl = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} 1 \cdot 1 \, dt = \frac{d}{2} - \left(-\frac{d}{2}\right) = d$$

Es handelt sich um die Gerade durch A und B .

c)

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}(-T) &= M + R \left(\frac{-\sin T}{\sqrt{1 - \sin^2 T}} \right) \\ &= M + R \left(\frac{-\frac{d}{2R}}{\frac{\sqrt{R^2 - \frac{d^2}{4}}}{R}} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 0 - R \frac{d}{2R} \\ -\sqrt{R^2 - \frac{d^2}{4}} + R \frac{\sqrt{R^2 - \frac{d^2}{4}}}{R} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{d}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = A, \end{aligned}$$

analog ergibt sich $\tilde{\gamma}(T) = B$ (einziger Unterschied: $+\sin T$ im ersten Schritt).

$$\|\dot{\tilde{\gamma}}(t)\| = \sqrt{0 + R^2(\sin^2 t + \cos^2 t)} = R$$

$$\int_{\tilde{\Gamma}} 1 \, dl = \int_{-T}^T 1 \cdot R \, dt = 2R \arcsin\left(\frac{d}{2R}\right)$$

Es handelt sich um einen Kreisbogen mit Radius R von A nach B (Lichtweg bei genügend großer Entfernung von der Erdoberfläche).

d) ...

e) $\tilde{\Gamma}$ ist länger.

Die Längendifferenz ist

$$2R \arcsin\left(\frac{d}{2R}\right) - d.$$

Für $d = 100$ [m] ergibt sich die Differenz $1,73 \cdot 10^{-11}$ [m] (17 Pikometer).

Für $d = 1000$ [m] ergibt sich die Differenz $1,73 \cdot 10^{-8}$ [m] (17 Nanometer).

Für $d = 10000$ [m] ergibt sich die Differenz $1,73 \cdot 10^{-5}$ [m] (17 Mikrometer).

Der Abstand $\|\tilde{\gamma}(0) - \bar{\gamma}(0)\| = \tilde{\gamma}_2(0) = -\sqrt{R^2 - \frac{d^2}{4}} + R$ ist offensichtlich der maximale Abstand der beiden Kurven.

Für $d = 100$ [m] ergibt sich der Abstand $2,55 \cdot 10^{-5}$ [m] (25 Mikrometer).

Für $d = 1000$ [m] ergibt sich der Abstand $2,55 \cdot 10^{-3}$ [m] (2,5 Millimeter).

Für $d = 10000$ [m] ergibt sich der Abstand $2,55 \cdot 10^{-1}$ [m] (25 Zentimeter).

f)

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arcsin''(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}^3}$$

$$\arcsin'''(x) = \frac{2x^2 + 1}{\sqrt{1-x^2}^5}$$

$$\arcsin(0) = 0$$

$$\arcsin'(0) = 1$$

$$\arcsin''(0) = 0$$

$$\arcsin'''(0) = 1$$

$$\arcsin(x) = 0 + x + 0 + \frac{1}{6}x^3 + O(x^4) = x + \frac{1}{6}x^3 + O(x^4)$$

$$L(d) = 2R \arcsin\left(\frac{d}{2R}\right)$$

$$= 2R \left(\frac{d}{2R} + \frac{1}{6} \frac{d^3}{8R^3} + O\left(\left(\frac{d}{R}\right)^4\right) \right)$$

$$= d + \frac{1}{24} \frac{d^3}{R^2} + O\left(\left(\frac{d}{R}\right)^4\right)$$

$$\Rightarrow L(d) - d = \frac{1}{24R^2} \cdot d^3 + O\left(\left(\frac{d}{R}\right)^4\right)$$

Es ergeben sich auf 5 signifikante Stellen die selben Werte wie oben.

Insbesondere sieht man hier direkt, dass sich bei zehnfacher Länge die tausendfache Differenz ergibt (d^3), mit $\frac{1}{24R^2} \approx 17 \cdot 10^{-18}$ erhält man leicht im Kopf die oben in Klammern angegebenen Abschätzungen.