**Aufgabe 37:** Sei $x_0 \in \mathbb{R}^3$ und

$$Z = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1^2 + x_2^2 = 1\}.$$

Finden Sie $x_Z \in Z$, so dass

$$\|x_0 - x_Z\| \leq \|x_0 - x\|$$

für alle $x \in Z$.

a) Stellen Sie $x_0$ und ein beliebiges $x \in Z$ in Zylinderkoordinaten dar.

b) Geben Sie den Abstand $\|x_0 - x\|^2$ als Funktion $d(\varphi, z)$ an.

c) Bestimmen Sie die kritischen Punkte der Funktion $d(\varphi, z)$.

d) Berechnen Sie die Hessematrix von $d(\varphi, z)$.

e) Bestimmen Sie das Minimum der Funktion $d(\varphi, z)$.

**Aufgabe 38:**

a) Bestimmen Sie für die Funktion

$$f : x \mapsto f(x) = \cos(x)$$

die Taylor-Entwicklung an der Stelle $x_0 = \frac{\pi}{2}$ mit Restglied $O(|x - x_0|^{2n})$.

b) Bestimmen Sie für die Funktion

$$g : (x, y) \mapsto g(x, y) = \cos(x)\cos(y)$$

die Taylor-Entwicklung an der Stelle $(x_0, y_0) = (0, 0)$ mit Restglied der Ordnung 3.

**Aufgabe 39:** Sei $a \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Entwicklen Sie die Funktion $f(x) = \|x - a\|$ nach Taylor an der Stelle $x_0$ bis einschließlich Terme zweiter Ordnung.

**Aufgabe 40:** Bestimmen Sie für die Funktion

$$g(x, y) = \sqrt{r^2 - (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2}, \quad 0 < r < R,$$

die Taylor-Entwicklung an der Stelle $(R, 0)$ mit Restglied der Ordnung 3.
**Tipp:** Finden Sie eine Funktion $h(\cdot)$, so dass $g(x, y) = h(d(x, y))$ mit $d(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.