

**Aufgabe 41:** Betrachten Sie die Gleichungen:

$$\begin{aligned}h(x, y, z) &:= (x - 2)^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0, \\g(x, y, z) &:= x - 1 = 0, \\f(x, y, z) &:= \begin{pmatrix} h(x, y, z) \\ g(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

- Geben Sie eine geometrische Interpretation der Situation an. Welche Figuren schneiden sich hier? Was ist die Schnittmenge dieser Figuren?
- Beschreiben Sie die Schnittmenge vollständig (in insgesamt 4 Stücken) als Funktionen über  $z$  bzw. über  $y$ .

**Tipp:** Fertigen Sie eine Skizze der Situation an!

**Aufgabe 42:** Betrachten Sie die Gleichungen:

$$\begin{aligned}h(x, y, z) &:= y^2 + z^2 - 4 = 0, \\g(x, y, z) &:= x + y - 1 = 0, \\f(x, y, z) &:= \begin{pmatrix} h(x, y, z) \\ g(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Geben Sie eine geometrische Interpretation der Situation an. Welche Figuren schneiden sich hier? Was ist die Schnittmenge dieser Figuren? Beschreiben Sie die Schnittmenge vollständig und geben Sie den Tangentialraum an.

**Tipp:** Fertigen Sie eine Skizze der Situation an!

**Aufgabe 43:** Es sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetig differenzierbare Funktion mit  $\nabla f(x, y, z) \neq 0$ .

- Bestimmen Sie für die durch  $f(x, y, z) = 0$  gegebene Fläche die Tangentialebene in einem Punkt  $(x_0, y_0, z_0)$  mit

$$f(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0,$$

indem Sie die Fläche als Graph einer Funktion über der  $xy$ -Ebene darstellen und den Tangentialraum an die Graphenfläche in Normalenform berechnen (Tipp: Ohne Normierung der Normalen ist die Rechnung einfacher). Verwenden Sie den Satz über impliziten Funktionen, um die auftretenden partiellen Ableitungen dieser unbekanntenen Funktion durch partielle Ableitungen von  $f$  auszudrücken.

- Was ergibt sich für das Ellipsoid mit der Gleichung

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

an der Stelle  $(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{\sqrt{3}}(a, b, c)$ ?

**Aufgabe 44:** a) Betrachten Sie das Gravitationspotential

$$U(x) = U(x, y, z) := \frac{mG}{\|x - a\|} = \frac{mG}{\sqrt{(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 + (z - a_3)^2}}$$

eines Punktes  $a \in \mathbb{R}^3$  der Masse  $m > 0$ . Die positive Konstante  $G$  mit dem Wert  $G = (6672 \pm 4)10^{-14}m^3s^{-2}kg^{-1}$  ist die Gravitationskonstante. Zeigen Sie, dass die Niveauflächen

$$\mathcal{F}_c := \{x \in \mathbb{R}^3 : U(x) = c\}$$

von  $U$  für jedes  $c > 0$  zweidimensionale Flächen sind. Um welche Flächen handelt es sich?

b) Das Gravitationspotential zweier Punkte  $a, b \in \mathbb{R}^3$  ( $a \neq b$ ) der Massen  $m_1 = m_2 = m > 0$  lautet

$$V(x) = V(x, y, z) := \frac{m_1G}{\|x - a\|} + \frac{m_2G}{\|x - b\|}$$

Sind die Niveauflächen  $\mathcal{S}_c := \{x \in \mathbb{R}^3 : V(x) = c\}$  von  $V$  wiederum für jedes  $c > 0$  zweidimensionale Flächen?