Aufgabe 45: Bestimmen Sie denjenigen Punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ auf dem Rotationshyperboloid $H := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0\}$, der vom Punkt $(1, -1, 0)$ den kleinsten Abstand hat.

Aufgabe 46:

a) Bestimmen Sie das Maximum der Funktion $f(x, y, z) := x^2y^2z^2$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

b) Folgern Sie die Ungleichung

$$\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}$$

zwischen dem geometrischen Mittel $\sqrt[3]{abc}$ und dem arithmetischen Mittel $\frac{a+b+c}{3}$, welche für alle nichtnegativen $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt.

Tipp: Zeigen Sie $\sqrt[3]{x^2y^2z^2} \leq \frac{1}{3}$ falls $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Setzen Sie $x^2 = \frac{a}{a+b+c}$, $y^2 = \frac{b}{a+b+c}$, $z^2 = \frac{c}{a+b+c}$.

Aufgabe 47: Betrachten Sie die Kurve

$$\gamma(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \cos(2\pi t) \\ e^t \sin(2\pi t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

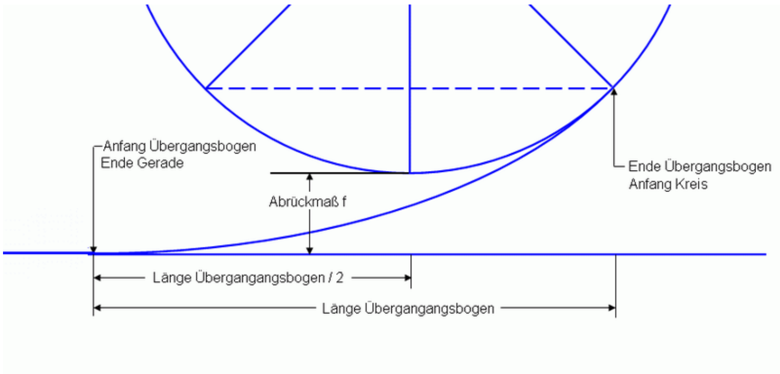
mit $t \in [0, 2]$.

a) Berechnen Sie die Punkte $\gamma(\frac{i}{4})$, $i = \{0, \ldots, 8\}$, und skizzieren Sie die Kurve.

b) Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve.

c) Bestimmen Sie die Krümmung der Kurve.

Aufgabe 48: In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass der "beste" Looping in einer Achterbahn ein Klothoiden-Looping ist. Eine Klothoide ist eine Kurve $x : [0, b] \to \mathbb{R}^2$ mit der Eigenschaft, dass die Krümmung an jedem Punkt proportional zur Länge bis zu dieser Stelle ist. Das folgende Bild zeigt den Übergang von einer Geraden zum Kreis mit einer sogenannten Klothoiden im allgemeinen Fall (aus Wikipedia).



Der Looping besteht also aus einem Kreisbogen und zwei Klothoiden, an den Übergangsstellen zum Kreisbogen bzw. zur Geraden stimmen die Ableitungen bis zur Ordnung 2 überein. Wir nehmen zusätzlich an, dass sowohl der Achterbahnzug als auch die Fahrgäste einen einzigen Massenpunkt bilden und es weder Reibung noch Luftwiderstand gibt (Erinnerung: $g = 9.81 \frac{m}{s^2}$).

a) Berechnen Sie den Radius R und die Krümmung κ_{Kreis} des Kreisbogens, wenn man davon ausgeht, dass die Fahrgäste bei einer Geschwindigkeit von $20 \frac{m}{s}$ im oberen Punkt schwerelos sind.

b) Die Klothoide x erfüllt folgende Bedingungen:

$$x(0) = 0, \dot{x}(0) = e_1 \text{ und } \kappa(t) = \frac{1}{A^2} t.$$

Zeigen Sie, dass die Gleichung der bogenlängenparametrisierten Klothoide folgendermaßen gegeben ist:

$$x(t) = \int_0^t \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{s^2}{2A^2}\right) \\ \sin\left(\frac{s^2}{2A^2}\right) \end{pmatrix} ds. \tag{1}$$

c) Sei im Folgenden $A = \frac{R}{2}$. Was ist die Länge einer der beiden Klothoiden bis zum Berührpunkt mit dem Kreis?

d) Geben Sie die Taylor-Entwicklung der Klothoiden mit Restglied $O(t^4)$ um den Ursprung an.