Übungen zur Analysis in mehreren Veränderlichen

Universität Bonn, Wintersemester 2016/17
Prof. Dr. Carsten Burstedde
Stand: 22. Dezember 2016

Blatt 10

Ausgabe: 22.12.2016
Abgabe: 12.1.2017

Diesem Blatt enthält zwei Bonuspunkte.

Sie können die Aussage verwenden, daß invertierbare Matrizen eine Determinante haben, die nicht Null ist.

Aufgabe 33 (2 + 3 + 2 + 1 + 3 Punkte)**.** *Jede Teilaufgabe läßt sich ohne Lösen der anderen bearbeiten, wenn Sie deren Resultate voraussetzen.*

1. *Zeigen Sie für beliebige* $a, b, c \in \mathbb{R}^n$ *und* $0 < t \leq 1$*, daß*

$$|b - c| < t\,|b - a| \quad \Rightarrow \quad |a - c| > (1 - t)\,|b - a| \tag{10.1}$$

   (Tip: Widerspruchsbeweis, Dreiecksungleichung).

2. *Zeigen Sie, daß für eine stetige Funktion* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *und* $y \in \mathbb{R}$ *die Menge*

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < y\} \tag{10.2}$$

   offen ist.

3. *Weshalb ist dann die Menge*

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\} \tag{10.3}$$

   ebenfalls offen?

4. *Weshalb ist nun die Menge der invertierbaren Matrizen* $\mathrm{GL}(n) \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ *offen?*

5. *Betrachten Sie die Abbildung* $f : \mathrm{GL}(n) \to \mathrm{GL}(n)$*,* $f : A \mapsto A^{-1}$*. Da jeder Eintrag von* A^{-1} *ein Quotient von Polynomen ist (im Nenner ungleich Null), ist* f *differenzierbar. Zeigen Sie durch Ableiten von* $g : A \mapsto A\,f(A)$*, wobei Sie ausnutzen, daß für das Matrixprodukt* $Af(A) = AA^{-1} = \mathrm{Id} = \mathrm{const}$*, daß*

$$Df(A)H = -A^{-1}HA^{-1}. \tag{10.4}$$

Aufgabe 34 (1+3 Punkte)**.** *Betrachten Sie die Sinusfunktion* $f(x) = \sin(x)$*.*

1. *Nennen Sie ein offenes Intervall* I*, auf dem* f *eine Umkehrfunktion besitzt. Wir bezeichnen diese Umkehrfunktion mit* $g(y) = \arcsin(y)$*.*

2. *Berechnen Sie die Ableitung von* $\arcsin$ *mithilfe des Umkehrsatzes.*

Aufgabe 35 (2+2+3 Punkte). *Hier können Sie die dritte Teilaufgabe auch ohne die ersten beiden lösen.*

Betrachten Sie das Polynom

$$p(x) = x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad \textit{mit } a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}. \tag{10.5}$$

Nehmen wir drei reelle Nullstellen von $p(x)$ an, $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}$ mit $p(r_i) = 0$, machen wir den Ansatz

$$p(x) = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3). \tag{10.6}$$

1. *Schreiben Sie die Koeffizienten a_i als Funktion der Nullstellen r_j, suchen Sie also $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $r \mapsto a$.*

2. *Zeigen Sie, daß die Jacobimatrix der Abbildung f lautet*

$$Df(r) = \begin{pmatrix} -r_2 r_3 & -r_1 r_3 & -r_1 r_2 \\ r_2 + r_3 & r_1 + r_3 & r_1 + r_2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{10.7}$$

3. *Stellen Sie fest, unter welchen Bedingungen an die r_j die Funktion f in einer Umgebung invertierbar ist, so daß dort die Nullstellen glatte Funktionen der Koeffizienten des Polynoms sind.*