Übungen zur Analysis in mehreren Veränderlichen

Universität Bonn, Wintersemester 2016/17
Prof. Dr. Carsten Burstedde
Stand: 9. Februar 2017

Blatt 15

Ausgabe: 9.2.2017
Abgabe: keine

Aufgabe 52 (2+3 Punkte). *Betrachte $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Es gelte*

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2 \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{15.1}$$

Beweisen Sie, daß die Ableitung von f überall Null ist. Warum folgt daraus, daß f konstant ist?

Aufgabe 53 (5 Punkte). *Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch*

$$F(x, y, z) = (e^x y - 3x^2 \cos(z), e^x, x^3 \sin(z)). \tag{15.2}$$

Berechnen Sie das Wegintegral $\int_\gamma F \cdot \mathrm{d}\vec{x}$ mit $\gamma(t)$ als Kurve $x = \cos(t)$, $y = \sin(t)$, $z = t$ von $(1, 0, 0)$ bis $(-1, 0, \pi)$ – entweder über eine Stammfunktion oder direkt.

Aufgabe 54 (5 Punkte). *Seien $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 + z^2 - 50 = 0\}$ und $f(x, y, z) = x - y - z$. Bestimmen Sie mithilfe von Lagrangemultiplikatoren die lokalen und globalen Extremstellen von f auf E.*

Aufgabe 55 (5 Punkte). *Berechnen Sie das Doppelintegral*

$$\int_0^a \int_x^a \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathrm{d}y \mathrm{d}x, \quad 0 < a \in \mathbb{R}. \tag{15.3}$$

Aufgabe 56 (3+1+1 Punkte). *Betrachten Sie die Gleichung $\ddot{x} = \frac{-1}{(1+t)^2}$.*

1. *Finden Sie alle Lösungen für $t \geq 0$.*
2. *Finden Sie die Lösung $x(t)$, so daß $x(0) = 1$ und $\dot{x}(0) = 2$ erfüllt ist.*
3. *Finden Sie die Lösung $x(t)$, so daß $x(1) = 0$ und $\dot{x}(1) = 1$ erfüllt ist.*

Aufgabe 57 (3+1 Punkte). *Sei $\dot{x} = Ax$ ein lineares System.*

1. *Zeigen Sie, daß die Gleichung*
$$e^{tA} e^{-tA} = \mathrm{Id} \tag{15.4}$$
für alle Zeiten t gilt (Hinweis: vorgehen wie in Aufgabe 47).
2. *Warum folgt daraus $(e^A)^{-1} = e^{-A}$?*