Übungen zur Analysis in mehreren Veränderlichen

Universität Bonn, Wintersemester 2016/17
Prof. Dr. Carsten Burstedde
Stand: 17. November 2016

Blatt 5

Ausgabe: 17.11.2016
Abgabe: 24.11.2016

Aufgabe 13 (4 + 3 Punkte).

1. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Zeigen Sie, daß für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $\overline{U} = \overline{U \setminus \{x\}}$.*

2. *Seien $f_k : U \to \mathbb{R}^1$ für $k = 1, \dots, m$ Funktionen mit $U \subset \mathbb{R}^n$ beliebig. Betrachten Sie eine Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^m$, die durch*

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))^T, \quad x \in U, \tag{5.1}$$

definiert ist. Dann gilt für $x^* \in \overline{U \setminus \{x^*\}}$, daß $f^* = \lim_{x \to x^*} f(x)$ genau dann existiert, wenn für alle $k = 1, \dots, m$ $f_k^* = \lim_{x \to x^*} f_k(x)$ existiert. Wenn die Grenzwerte existieren, gilt

$$f^* = (f_1^*, \dots, f_m^*)^T. \tag{5.2}$$

Aufgabe 14 (5 Punkte). *In der Vorlesung haben wir gesehen, daß die Funktion*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & \text{falls } x^2 + y^2 > 0, \\ 0, & \text{falls } x = y = 0 \end{cases} \tag{5.3}$$

in Null nicht differenzierbar ist. Nach Satz 2.43 ist deswegen mindestens eine partielle Ableitung nicht stetig in Null. Berechnen sie die partiellen Ableitungen von $f(x,y)$ mit Ihrem Wissen aus Analysis 1 und weisen Sie eine der Unstetigkeiten nach.

Aufgabe 15 (6 + 2 Punkte). *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Zeigen Sie:*

1. *Sei $B : X \times Y \to Z$ eine bilineare Abbildung mit euklidischen Räumen X, Y, Z, sprich für festes $x \in X$, $y \in Y$ seien die Abbildungen $B_x(\cdot) = B(x, \cdot)$ und $B_y(\cdot) = B(\cdot, y)$ linear. Dann ist B in $X \times Y$ differenzierbar mit*

$$DB(x,y) : X \times Y \to Z, \quad (u,v) \in X \times Y \mapsto B(x,v) + B(u,y). \tag{5.4}$$

2. *Die Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : X^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x \cdot y$ ist in jedem Punkt (x,y) differenzierbar, und es gilt für*

$$D\langle \cdot, \cdot \rangle(x,y) : \quad (u,v) \mapsto \langle x, v \rangle + \langle u, y \rangle. \tag{5.5}$$